



Modélisation d'écoulements fluides en milieu encombré d'obstacles

Xavier Martin

► To cite this version:

Xavier Martin. Modélisation d'écoulements fluides en milieu encombré d'obstacles. Mathématiques [math]. Aix Marseille Université, 2015. Français. NNT : . tel-01235089

HAL Id: tel-01235089

<https://theses.hal.science/tel-01235089>

Submitted on 27 Nov 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

ECOLE DOCTORALE DE MATHEMATIQUES ET
INFORMATIQUE - ED 184

FACULTE

I2M - INSTITUT DE MATHEMATIQUES DE MARSEILLE

THESE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

Xavier MARTIN

Modélisation d'écoulements fluides en milieu encombré d'obstacles

Soutenue le 24 NOVEMBRE 2015

Composition du jury :

Michel BELLIARD	CEA Cadarache	Rapporteur
Christophe BERTHON	Université de Nantes	Rapporteur
Christophe CHALONS	Université de Versailles, St Quentin en Yvelines	Examineur
Thierry GALLOUËT	Université Aix-Marseille	Examineur
Jean-Marc HÉRARD	EDF R&D	Directeur de thèse
Jean-Claude LATCHÉ	IRSN Cadarache	Examineur

Invités :

Bruno AUDEBERT	EDF R&D
Martin FERRAND	EDF R&D

Résumé

On s'intéresse dans ce document à la modélisation d'écoulements compressibles en conduite unidimensionnelle (1D) à section variable et dans des domaines bi ou tridimensionnels encombrés d'obstacles. Le travail est motivé par la modélisation d'écoulements dans les circuits de refroidissement de réacteurs à eau pressurisée (REP). Ainsi ce travail a pour objectif de proposer une nouvelle formulation pour de tels écoulements. L'idée de base consiste à utiliser une formulation intégrale sur la base des équations aux dérivées partielles. Le système de lois de conservation associé aux équations d'Euler (masse, dynamique et énergie) est examiné.

Le premier chapitre examine le cas de conduites 1D à section continue ou discontinue. La formulation intégrale est présentée et les résultats numériques sont comparés avec (i) l'approche Well-Balanced et (ii) la solution de référence obtenue sur maillage très fin.

Les second et troisième chapitres examinent la modélisation d'écoulements compressibles dans des domaines contenant de nombreux tubes. La formulation intégrale est donnée, et les schémas numériques présentés, afin de gérer les interfaces fluide/fluide et les parois. Les schémas peuvent être explicites (chapitre 2), ou implicites (chapitre 3). Quelques cas tests analytiques sont présentés. On se concentre sur l'écoulement d'un fluide abordant une zone de tubes alignés de petite taille. Ici encore, la comparaison est faite avec la référence fluide ; les résultats sont également comparés avec ceux issus de l'approche équilibre classique, et ceux associés à la formulation intégrale unidimensionnelle présentée dans le premier chapitre.

Abstract

This document focuses on the modeling of compressible flows in one-dimensional (1D) pipes with variable cross-section, and in two or three-dimensional domains containing many small obstacles. The basic motivation is urged by the modeling of flows in the coolant circuit of pressurised water reactors (PWR). Thus this work aims at providing a new formulation for such a variety of flows. The basic idea consists in using an integral approach that is applied to the governing set of partial differential equations. Here the keystone is the conservative Euler set of equations, including mass, momentum and energy balance for any equation of state.

Hence, the first chapter investigates the case of one-dimensional pipes with continuous or discontinuous cross-section. Once the 1D+ integral formulation has been presented, numerical results are compared with : (i) the classical Well-Balanced (WB) approach, and (ii) the reference solution obtained with a multi-dimensional code with huge mesh refinement.

The second and third chapters provide some new insight on the numerical modeling of compressible flows in domains obstructed with many tubes. The integral formulation is derived, and numerical schemes are detailed, in order to handle fluid/fluid interfaces and wall boundaries. Schemes may be explicit (chapter 2), or implicit (chapter 3). A few analytic test cases are investigated. Focus is made on the flow incoming a region containing many tiny and aligned tubes. Here again, a comparison with the reference "fluid" solution is achieved ; results are also compared with those arising from the WB approach, and with those coming from the 1D+ integral approach proposed in the first chapter.

à mes parents, à mes frères,

Remerciements

Telle une épopée d'heroic fantasy, réaliser une thèse est une aventure. Certes, tout au long de son voyage, le protagoniste de cette quête ne croquera pas réellement de grand magicien blanc ou de créatures enchantées à cornes, mais toutes ses rencontres ne seront pas vaines, et chacune d'elles aura son rôle : grand guide, compagnon d'armes, soutien moral ou partenaire de rires et de fêtes. Il le sait, le voyage ne sera pas de tout repos ; des épreuves l'attendent mais celles-ci forgeront son caractère, l'aideront à avancer, et feront évoluer ses compétences.

Je repose les pieds sur Terre pour remercier très sincèrement mon directeur de thèse Jean-Marc Hérard. Outre ses qualités de directeur de thèse, de chercheur et de pédagogue reconnues, il fut un vrai guide, bienveillant, patient, et parfois même très courageux. Je tiens à remercier mon premier encadrant Bruno Audebert pour son suivi, sa présence et son savoir scientifique et industriel tout au long de ces trois années, malgré un emploi du temps très chargé suite à son ascension hiérarchique. Je présente aussi mes remerciements à Martin Ferrand, qui prit le relai de Bruno pour mon encadrement en cours de thèse. Il m'a permis de me remettre en question et m'a beaucoup apporté grâce à la qualité de ses connaissances et à son insistance. Enfin, je remercie Erwan Le Coupanec pour son aide à la prise en main de *Code_Saturne*, son intérêt pour mes travaux, son sérieux et sa sympathie.

Durant ces trois années, j'ai profondément apprécié être membre d'un groupe aussi riche qu'I83 qui, grâce à tous ses membres, m'a permis de vivre une aventure pleine de rires, de soutien et de partage de connaissances culturelles de tous horizons. Je les remercie donc tous un par un, et tous les souvenirs vécus avec chacun d'entre eux resteront gravés à jamais.

J'en profite pour remercier tout particulièrement, Sofiane Benhamadouche, Dominique Alvarez, David Monfort et toute l'équipe de développement *Code_Saturne*. Je n'oublie évidemment pas Thomas, Gihan, Augustin, Dorothée et Jérôme.

Je suis très fier d'avoir pu faire partie d'une équipe de doctorants compétents à la fois dans leur travail et leur folie (ré)créative. Je dédie donc un morceau de cette thèse à Cedric, Jean-François, Pierre et Benjamin, mais également à Sophie. Que la force soit

avec chacun d'eux.

J'envoie un "big love poney coeur" à mes amis parisiens d'adoption et de souche : PE, Jeanne, Lauriane, Benjamin, Bertrand et bien sûr Hélène ; je leur dis un grand merci pour toutes les fêtes et sorties qui ont pu m'aider à décompresser à certains moments. Car il faut savoir apprécier les petites choses que la vie nous offre, on n'a que le bonheur que l'on se donne.

J'ai une pensée particulière à tous mes amis nantais, qui me permettent de revenir fouler du pied, de temps à autres, cette terre sainte qu'est Nantes. Pour des raisons distinctes et individuelles, je pense bien entendu à remercier Charline, Eric, Harmony, Gaetan, Mélanie, Benjamin, Marion, Simon et Hoan.

Chacun de mes retours en Vendée a depuis toujours été marqué par un impressionnant accueil empli de rire et de Jack, que je dois principalement à Mickaël, Audrey, Glwadys et Aurélien. Merci à eux.

Avec un paragraphe pour lui tout seul, j'en arrive à remercier mon meilleur ami Teddie, qui durant ces trois ans, m'a soutenu et supporté à distance. Il a aussi toujours été disponible pour moi malgré tout ce qu'il a pu vivre, prenant même le temps de venir me voir. Je le remercie pour tout.

Pour terminer, j'ai une profonde gratitude envers ma famille, grâce à qui j'ai appris qu'une distance n'est finalement que relative. Je remercie en l'occurrence mes parents pour leur immense soutien malgré la distance et leur incomparable amour. Je les remercie de m'avoir fait confiance, et de m'avoir aidé pendant toute la durée de mes études. Je pense également à remercier chaleureusement mes frangins, pour leur humour mesquin à chacun de mes retours en territoire vendéen. Je ne serais pas où j'en suis aujourd'hui sans ma famille.

"No. Try not. Do... or do not. There is no try." - Maître Yoda -

Introduction

Contexte

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un partenariat entre EDF R&D, et l'Université de Marseille, et plus précisément entre le département de Mécanique des Fluides, Energie et Environnement (MFEE, Chatou) et l'Institut de Mathématiques de Marseille (I2M, Marseille).

La motivation principale de ce sujet est d'accroître les compétences techniques dans le domaine de la modélisation des écoulements fluides en milieu poreux, dans une perspective de préparation de l'avenir et de développement de codes de future génération. Cet effort paraît particulièrement important étant données certaines limitations des modèles physiques existants et des schémas numériques associés actuels. Cette thèse s'articule donc autour de la proposition d'une nouvelle approche pour la simulation d'écoulements fluides en milieu encombré d'obstacles.

Il importe tout d'abord de signaler qu'à l'extérieur du périmètre nucléaire EDF-CEA-AREVA-IRSN, il existe une activité importante dans le domaine poreux autour de l'exploitation des gisements et du stockage souterrain, notamment en France via le GNR MOMAS, l'IFP-EN et d'autres acteurs liés au milieu pétrolier. Néanmoins, ces dernières activités sont structurellement restreintes au cadre de modèles de bilan de masse d'espèces, les champs de vitesses ou débits étant en général fournis par des modèle locaux de type Darcy. Il est essentiel de noter que cette activité technique "pétrolière" a vu un développement très important des schémas de diffusion en milieu inhomogène anisotrope, point extrêmement utile pour la prise en compte des effets de diffusion dans les modèles fluides monophasiques ou diphasiques, laminaires ou turbulents.

Jusqu'à maintenant, les codes EDF-CEA dits "poreux" utilisés industriellement, tels que THYC (EDF), FLICA, CATHARE ou GENEPI (CEA) sont essentiellement issus de développements relativement anciens, et l'avancée importante de la performance des

machines de calcul depuis une dizaine d'années permet maintenant d'envisager des stratégies sensiblement différentes, dans une perspective de développement d'une nouvelle génération de codes. Ces codes doivent répondre aux contraintes de qualification imposées par les autorités de sûreté du nucléaire.

Les modèles poreux comportant des EDP pour la simulation des bilans de quantité de mouvement et d'énergie à dominante convective, qui intéressent EDF, doivent être ré-examinés et évalués en fonction des nouveaux acquis des deux dernières décennies en terme de modélisation et de simulation, des capacités des machines informatiques, et des objectifs sensiblement distincts de ceux des années 1980 (couplage de codes, aspects multi-échelles).

Définition et applications d'un milieu poreux pour le nucléaire

L'étude des écoulements en milieux poreux joue un rôle important dans de nombreux domaines tels qu'en mécanique et physique des sols et des matériaux composites, ainsi qu'en ingénierie pétrolière, chimique, pétrochimique, sanitaire, et agricole pour l'irrigation et le drainage (cf. [22, 19, 17, 10, 7]). Plusieurs ouvrages traitant de la porosité des milieux coexistent, mais on peut citer ici comme exemple le livre de J. Bear (cf. [2]) qui traite les aspects fondamentaux des écoulements à travers les milieux poreux. A échelle équivalente, on peut voir la modélisation d'écoulements en milieu poreux comme une description macroscopique d'un phénomène microscopique.

Lorsqu'on parle de milieu poreux, on pense classiquement à un milieu dé-structuré bi-composé d'un matériau solide comportant des interstices "vides", pouvant être traversé ou rempli par un fluide, monophasique ou diphasique, compressible ou incompressible. On peut citer quelques exemples naturels comme les roches poreuses et les sols ou artificiels comme certains matériaux de construction et structures composites. Quelle qu'en soit son origine, un milieu poreux est caractérisé par un taux de porosité, pouvant varier en espace mais également en temps. On définit généralement le taux de porosité ϕ sur un volume représentatif (voir la Figure 1) et on le définit comme le rapport entre le volume de vide et le volume total du milieu tel que :

$$\phi = \frac{V_{vide}}{V_{total}}$$

avec V_{vide} le volume maximal pouvant être occupé par un fluide et V_{total} le volume total du volume représentatif du matériau poreux (vide + solide).

On considère parfois un domaine comme poreux malgré la connaissance des éléments qui le composent et leur disposition à l'intérieur de celui-ci. C'est le cas pour des études sur des structures composées d'un nombre important d'éléments de

taille relativement petite par rapport à la taille de l'ensemble, et dont les machines de calcul actuelles ne permettent pas une simulation fine. Cette assimilation à un milieu poreux est actuellement utilisée dans le cas de certaines études nucléaires à forts enjeux.

L'électricité que distribue de nos jours l'entreprise EDF est principalement produite par les centrales nucléaires. Ces sites industriels possèdent deux composants essentiels : les générateurs de vapeur et les réacteurs nucléaires.

Un générateur de vapeur est une structure de forme cylindrique mesurant près de vingt mètres de haut, composée de plusieurs milliers de tubes d'environ deux centimètres de diamètre, dans laquelle circule le fluide caloporteur des circuits primaires. Les tubes sont disposés de façon régulière, parallèles les uns aux autres et dans le sens de circulation du fluide. Le fluide du circuit secondaire circulant à l'intérieur du générateur et autour des tubes peut atteindre des températures avoisinant les 275 degrés Celsius sous sa phase gazeuse, une pression voisine de $60 \cdot 10^5$ Pa et une vitesse d'environ 1 à 10 mètres par seconde. Le rapport d'échelle particulièrement grand entre le générateur et les tubes reste actuellement un frein à la simulation fine des écoulements au sein d'une telle structure. C'est pourquoi assimiler numériquement un générateur à un milieu poreux est une solution développée depuis déjà de nombreuses années.

Le réacteur nucléaire est une chaudière alimentée en combustible nucléaire qui possède en son sein un coeur. C'est dans ce coeur de réacteur, et plus finement dans les crayons combustibles que se produit la réaction en chaîne nucléaire via la fission de noyaux d'atomes lourds pour générer l'énergie suffisante à la production de chaleur et au chauffage du fluide caloporteur du circuit primaire (eau à 150 bar). Les crayons combustibles sont rangés de manière régulière, parallèles les uns aux autres et dans le sens de l'écoulement moyen. Le fluide du circuit primaire circule autour de ces crayons. Pour les mêmes raisons que précédemment, on associe numériquement à une telle structure encombrée d'obstacles la notion de milieu poreux.

Que ce soit dans le cas d'un générateur de vapeur ou dans celui d'un réacteur, on se trouve donc dans un milieu encombré d'obstacles assimilé aux milieux poreux classiques. La différence notable entre un milieu poreux classique et un milieu poreux nucléaire est d'aspect directionnel, car elle réside dans l'assemblage "non chaotique" des internes. La transition de milieu fluide (sans obstacle) à un milieu encombré peut parfois être soudaine, le fluide venant impacter l'entrée de zone poreuse.

L'accroissement continu des performances des outils informatiques donne de jours en jours accès à des études et des calculs de plus en plus fins. Il faut donc également réfléchir avec une vision du raffinement en maillages continu, dans l'optique que les calculs aujourd'hui poreux à échelle composant, évolueront naturellement vers des calculs fluides à échelle CFD.

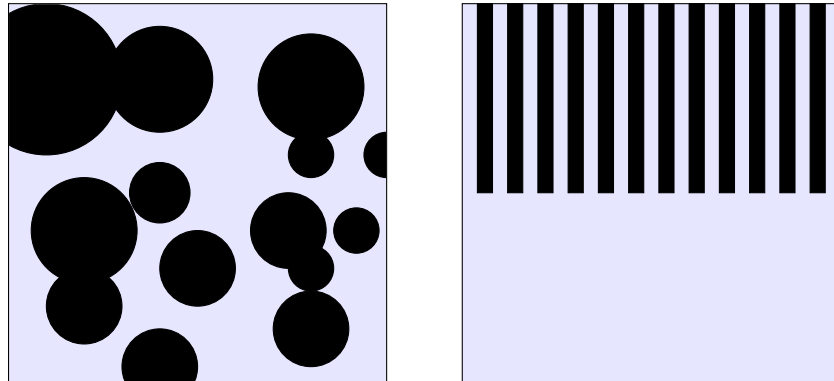


FIGURE 1: Exemples de volumes représentatifs d'un milieu poreux classique (à gauche) et d'un milieu poreux "nucléaire" ou structuré (à droite). L'espace pouvant être occupé par un fluide est représenté en bleu.

Quelques outils numériques actuels des acteurs du secteur nucléaire

Les coeurs de réacteurs et les générateurs de vapeur constituent des composants essentiels des centrales nucléaires impliquant des écoulements diphasiques dans des faisceaux d'internes tubulaires. On a cité plus haut quelques outils numériques développés dans les années 1980 par des acteurs du nucléaire français.

Le logiciel FLICA

FLICA est un code de calcul pour la simulation d'écoulements diphasiques tridimensionnels dédié aux applications nucléaires, et particulièrement dans les coeurs de réacteurs nucléaires (cf. [26]). Ce logiciel est développé au CEA (Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives) par la DEN (la direction de l'énergie nucléaire).

La résolution des équations régissant les écoulements est basée sur des méthodes Volumes Finis pour des maillages non-structurés, utilisant des solveurs de Riemann approchés de type schéma de Roe, pour l'approximation des flux convectifs aux interfaces.

Le logiciel CATHARE

CATHARE (Code Avancé de THERmohydrolique pour les Accidents des Réacteurs à Eau) est un code système développé au CEA (cf. [1]). Le code est composé de plusieurs modules : un module 0D pour la description de très grandes structures, un module 1D pour la description d'écoulements en conduite, et un module 3D.

Les systèmes d'équations considérés dans le code régissant l'écoulement sont associés à des modèles diphasiques bi-fluides, approchés par un schéma numérique de type Volume Finis du premier ordre. La discrétisation en temps est implicite dans les modules 0D et 1D, et semi-implicite dans le cas tridimensionnel. Le code est basé sur l'utilisation de maillages décalés.

Le logiciel THYC

THYC (Thermo-HYdraulique des Coeurs) est un logiciel de simulation d'écoulements fluides monophasiques ou diphasiques tridimensionnels à l'intérieur des faisceaux de tubes ou crayons combustibles (cf. [8]). Il est développé depuis le milieu des années 1980 par EDF. Ce code utilise une approche poreuse en prenant en compte un volume de contrôle dans le domaine tridimensionnel incluant du fluide et des solides. En fait, le modèle THYC moyenne en temps et en espace les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie du mélange eau-vapeur.

Le logiciel GENEPI

Le logiciel GENEPI a été développé au CEA. Il a pour objectif la simulation numérique des écoulements diphasiques dans les générateurs de vapeur. Il résout les équations de bilan de masse dynamique et d'énergie (formulées en enthalpie) en adoptant une approche en éléments finis. Ce code adopte également une approche poreuse classique. On renvoie aux documents [16] et [3] pour plus de détails.

Structure du manuscrit

Ce manuscrit s'oriente autour de la modélisation et la simulation d'écoulements fluides en milieux poreux. Il importe dans un premier temps, d'étudier l'état de l'art des modèles poreux classiquement utilisés. Le premier chapitre se concentre sur la construction d'une nouvelle approche multidimensionnelle pour la simulation d'écoulements fluides en conduite à section variable. Après vérifications et validation sur plusieurs cas tests stationnaires et instationnaires, et en s'appuyant sur cette nouvelle approche, on proposera, dans le second chapitre, une nouvelle formulation intégrale multidimensionnelle pour la simulation d'écoulements de fluides "fortement" compressibles en milieu encombré d'obstacles. Les différents cas tests feront appel à des schémas volumes finis

explicités adaptés à des écoulements à grand nombre de Mach. La dernière partie de ce manuscrit fera appel à la formulation intégrale pour la simulation d'écoulements de fluide compressible à plus faible nombre de Mach. Les schémas implicites à pas fractionnaires en temps tels qu'implémentés dans le code *Code_Saturne* (cf. [23]) sont très utiles pour des écoulements à faible vitesse ; on les adaptera alors à la nouvelle approche intégrale multidimensionnelle pour la simulation d'écoulements fluides en milieu encombré. Chacun des trois chapitres sera complété d'une annexe regroupant les résultats des différents tests de vérification, de validation et de convergence en maillage.

Une approche unidimensionnelle pour la simulation d'écoulements en tuyère à sections variables.

Le premier chapitre s'articule autour d'une nouvelle approche unidimensionnelle pour la simulation d'écoulement fluide en canal à section variable. Notons qu'en 1D, les modèles d'équations de conservation utilisés pour la simulation des écoulements en milieux poreux sont identiques à ceux pour les écoulements en tuyère à section variable. En discrétisant le domaine, on peut associer le taux de porosité d'une cellule (plus exactement le volume qu'occupe le fluide) à la hauteur de section.

La recherche et le développement de ces approches intéressent particulièrement les industries car elles sont utiles dans de nombreuses applications. C'est le cas par exemple dans un certain nombre d'applications dans le domaine médical, dans l'industrie pétrolière (écoulements de mélanges, forage, [25]), dans le domaine des études géologiques des écoulements dans les sols et sous-sols, et dans le milieu des compagnies électriques. De plus, un nombre non négligeable de situations courantes contiennent des passages de contractions et/ou d'élargissements soudains de section.

A l'heure actuelle, la méthode couramment employée consiste en l'approximation numérique des solutions du système d'équations 1D suivant (voir par exemple [16] et [3]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t S(x) = 0 \\ \partial_t(S(x)\rho) + \partial_x(S(x)Q) = 0 \\ \partial_t(S(x)Q) + \partial_x(S(x)Qu) + S(x)\partial_x P = D(W)S(x) \\ \partial_t(S(x)E) + \partial_x(S(x)QH) = 0 \end{array} \right. \quad (0.0.1)$$

Où ρ représente la densité, u la vitesse, $Q = \rho u$ le débit, E l'énergie totale et H l'enthalpie totale. $D(W)$ est un terme source additionnel (tel qu'une perte de charge) et $S(x)$ est la hauteur de section. L'énergie totale est définie par l'équation d'état : $E = \rho e(\rho, P) + \rho \frac{u^2}{2}$ (l'énergie interne e dépend quant à elle du modèle thermodynamique imposé).

Une approche efficace doit avoir la capacité de gérer aussi bien des écoulements au travers de conduites à sections régulières que discontinues. C'est ainsi qu'on retrouve un nombre certain d'investigations continues et discrètes du problème dans la littérature. Ainsi, que les termes sources soient ou non négligés, une approche numérique générale a été proposée il y a maintenant quelques années, basée sur l'approche dite Well-Balanced ([5, 6, 12, 14, 15, 18, 20, 24]). Par la suite, plusieurs algorithmes performants ont été proposés. Cette stratégie, adaptée aux schémas volumes finis, est basée sur la préservation des invariants de Riemann de l'onde stationnaire du modèle, qui ne sont autres que le débit QS , le flux enthalpique total QHS et l'entropie σ .

Malheureusement, certains articles soulèvent l'inconvénient de la préservation du dernier invariant de Riemann, comme par exemple dans l'article [13] où les auteurs montrent que la conservation de l'entropie à travers une section discontinue n'est pas physiquement admissible.

Ainsi, deux solutions peuvent être envisagées pour contourner le problème. Une première idée consisterait à imposer une perte de charge singulière de sorte à retrouver le comportement réel de l'écoulement. Pour cela, il suffirait d'inclure une loi de fermeture adaptée issue de l'ingénierie (cf. [21]), ou de fournir une loi de fermeture appropriée et adaptable.

La seconde idée consiste en la reformulation du problème unidimensionnel, en partant d'un point de vue multidimensionnel, de sorte à prendre en compte l'apport des sauts de sections et donc des pertes de charges singulières. Une première caractéristique est l'automatisme de la prise en compte numérique des singularités. Une seconde qualité est la capacité qu'a cette approche à gérer tout type de conduite à section régulière ou discontinue, plus ou moins encombrée jusqu'à obstruction totale. La dernière caractéristique notable est la validité de l'approche pour n'importe quel modèle thermodynamique, et la portabilité vers des modèles d'écoulement multiphasiques ou turbulents.

Le cheminement de l'approche est le suivant : une fois le système d'équations multidimensionnel établi (de type Navier-Stokes, ou Euler par exemple) on intègre en temps et en espace sur une cellule, puis grâce aux formules de Green et en parcourant toutes les surfaces fluides et solides de la cellule, on obtient une formulation intégrale naturelle simple. On discrétise ensuite la formulation, puis on simplifie les équations en s'appuyant sur la géométrie de chaque cellule et en utilisant la solution exacte du problème de Riemann et la méthode des états miroirs pour prendre en compte les parois solides. Il reste finalement à déterminer un schéma de flux aux interfaces fluides et une solution exacte ou approchée des contributions de la pression aux parois.

Les solutions obtenues à partir de la nouvelle approche sont ensuite comparées aux

solutions de deux autres méthodes. La première approche est dite de référence, dans le sens où elle a été construite à partir de la vraie solution multidimensionnelle en géométrie exacte et sur maillage fin. La seconde est l'approche well-balanced classique unidimensionnelle associée au système d'équations (0.0.1). En sus, deux choix de contributions de pression aux parois ont été retenus et comparés : l'un issu de la solution exacte du problème de Riemann dépendante du nombre de Mach normal à la paroi, et l'autre en imposant la pression de la cellule à la paroi.

Les méthodes ont été comparées sur plusieurs cas tests d'écoulements compressibles. Le premier cas est un cas test de simulation d'écoulement compressible stationnaire dans une tuyère de Laval, dont on connaît la solution analytique. Les autres cas tests instationnaires sont inspirés du tube à choc, mais dans des conduits à sections discontinues, et dont on ne connaît pas de solution analytique exacte.

Une nouvelle approche intégrale pour la simulation d'écoulements de fluides compressibles en milieu encombré.

Le second chapitre est dédié à la construction d'une formulation poreuse multidimensionnelle, pour la simulation de l'évolution d'un fluide à l'intérieur d'un domaine contenant un nombre important de petits obstacles. Cette formulation liée au chapitre précédent et à la formulation 1D, fait suite aux attentes industrielles de simulation de l'évolution d'un fluide à l'intérieur d'un générateur de vapeur ou d'un coeur de réacteur, évoquées précédemment.

Plusieurs types d'obstacles, ou internes, coexistent dans le domaine physique. Deux propriétés physiques sont néanmoins imposées dans ce manuscrit : les éléments sont supposés être non perméables et stationnaires. Les internes présents dans le domaine sont potentiellement de type "plaque infiniment mince" ou bien de type élément tubulaire ou crayon combustible.

Que le domaine physique, dépourvu d'internes, soit maillé grossièrement ou finement, trois types de cellules peuvent être recensés. Une cellule peut être entièrement fluide (n'ayant d'intersection avec aucun obstacle interne à la cellule), totalement solide (incluse dans un obstacle), ou partiellement fluide (incluant du fluide et un morceau d'interne). De ce fait, deux conséquences apparaissent. Dans un premier temps et par construction, avec un raffinement "infini" de maillage adapté au domaine et aux internes, le calcul tend vers un calcul "purement CFD", avec finalement la disparition des cellules partiellement fluides (seules restent les cellules totalement fluides ou solides). La seconde conséquence, c'est la présence de différents types d'interactions entre la position des mailles et des obstacles. En effet, un interne peut se trouver entièrement ou partiellement immergé dans le volume de contrôle, ou encore partager une face de bord avec la cellule.

Pour commencer, on considère les équations sur la base du système d'équations différentielles de Navier-Stokes ou d'Euler, régissant l'écoulement du fluide compressible monophasique. On écrit ensuite la forme intégrale des lois de conservation sur un volume de contrôle quelconque pouvant contenir plusieurs internes, et on obtient finalement une formulation intégrale instationnaire.

Une fois la formulation intégrale définie, le choix du schéma volumes finis pour l'approximation des flux aux interfaces fluides s'est porté sur le schéma VFRoe-ncv, que l'on peut retrouver dans des articles tels que [11]. Suite à la comparaison des résultats du chapitre précédent, le choix de la contribution de pression aux parois des internes s'est porté sur une pression pariétale égale à la pression moyenne de la cellule à l'instant précédent. Les conditions d'entrée et de sortie fluides du domaine s'inspirent de la résolution de demis problèmes de Riemann, décrit par les auteurs de l'article [4] (on se réfère à [9] pour les grands principes).

La méthode a tout d'abord été testée sur un cas test de vérification. Le domaine tubulaire est de longueur infinie d'amont en aval, et constitué de trois sous-canaux indépendants séparés par deux internes non perméables et stationnaires de type crayons ou tubes parallèles. Trois fluides aux propriétés différentes de vitesse, pression et densité, circulent dans chacun des trois intercanaux censés ne pas communiquer entre eux. La solution analytique est connue dans chacun des trois sous-canaux et correspond à un écoulement stationnaire, uniforme entre deux crayons et localement unidirectionnel. On vérifie avec ce cas test qu'avec un maillage adapté, les canaux ne communiquent pas entre eux au travers des crayons. Néanmoins, avec un maillage trop grossier et mal adapté, on peut se retrouver en présence d'une cellule traversée par un interne, contenant du fluide des deux sous-canaux que sépare l'interne.

L'approche a ensuite été validée sur un second cas test de transition entre milieu fluide et milieu poreux. Une nouvelle fois, le domaine tubulaire est de longueur infinie en amont et en aval. Le milieu est uniformément fluide en amont et encombré en aval de deux crayons alignés dans le sens de l'écoulement, avec une interface de transition discontinue entre les deux zones. On considère donc l'écoulement d'un fluide compressible entrant dans un milieu encombré de multiples tubes alignés. On souhaite obtenir un écoulement stationnaire, dont on ne connaît qu'une solution analytique approchée paramétrée par la pression à l'interface de transition des milieux. Les solutions obtenues avec l'approche intégrale sur plusieurs raffinements de maillages sont comparées à la solution de référence obtenue sur un maillage très fin adapté au domaine complet.

Une formulation intégrale implicite pour la modélisation d'écoulements fluides en milieu encombré d'obstacles.

Le chapitre 3 est consacré à l'adaptation à la formulation intégrale en milieu encombré d'obstacles, d'un schéma implicite en temps à pas fractionnaires. Les schémas

implicites en temps à pas fractionnaires sont mieux adaptés à la simulation d'écoulements à faible nombre de Mach que les solveurs explicites du chapitre précédent. Le développement et la validation de l'approche intégrale avec adaptation d'un schéma faible Mach a donc tout son intérêt dans le cadre nucléaire de futures études de simulation d'écoulements, et c'est pourquoi il a été choisi de s'appuyer sur *Code_Saturne* qui emploie des schémas implicites à pas fractionnaires.

Le principe de construction de l'approche intégrale est identique au chapitre précédent. Le système d'équations intégré en temps et en espace sur un volume de contrôle fini quelconque, et décrivant l'écoulement d'un fluide compressible, monophasique et non visqueux est de type Euler.

L'algorithme basé sur une méthode à pas fractionnaires en temps, est donc divisé en trois étapes de prédiction : une étape de bilan de masse pour prédire la pression, une étape de bilan de quantité de mouvement mettant à jour la vitesse, et une étape de bilan d'énergie afin d'obtenir l'énergie totale. Chaque étape est composée d'un schéma en temps de type Euler implicite et de schémas en espace de type volumes finis.

La méthode a été validée sur un cas test de transition de milieu fluide à milieu encombré, semblable au cas test de validation du chapitre précédent, mais avec des écoulements à faible nombre de Mach. Le domaine est de forme tubulaire et infini d'amont jusqu'en aval. La moitié amont du domaine est uniformément fluide tandis que la moitié aval est encombrée d'internes comparables à des crayons combustibles alignés, parallèles les uns aux autres, stationnaires et non perméables. La transition entre les milieux fluide et encombré est discontinue.

Valorisation des résultats

Le premier chapitre correspond à un article soumis en version révisée à la revue *Computers & Fluids*, intitulé *A simple integral approach to compute flows in ducts with variable cross-section*, co-écrit par B. Audebert, J-M. Hérard, X. Martin et O. Touazi. Il est paru comme note interne EDF R&D H-I85-2014-5201-EN. Une version courte de ce travail a fait l'objet d'une présentation au congrès FVCA7 à Berlin, en Juin 2014, sous le titre "*A simple finite volume approach to compute flows in variable cross-section ducts*", co-écrite par B. Audebert, J-M. Hérard, X. Martin et O. Touazi, que l'on peut retrouver dans le proceeding *Finite Volume for Complex Applications VII - Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems* (Springer, pages 769-777, 2014), et parue comme note interne EDF R&D H-I85-2014-2373-EN.

Le second chapitre correspond à un article soumis à publication en 2015 à la revue *International Journal on Finite Volumes* sous le titre *An integral approach to compute compressible fluid flows in domains containing obstacles* et co-écrit par J-M. Hérard et

X. Martin. Il est également paru en note interne EDF R&D H-I85-2015-4470-EN.

Le troisième chapitre, intitulé "Une formulation intégrale pour la modélisation d'écoulements fluides en milieu encombré d'obstacles", co-écrit par M. Ferrand, J-M. Hérard, E. Le Coupanec et X. Martin a fait l'objet d'une note interne EDF R&D H-I83-2015-05276-FR.

Bibliographie

- [1] F. Barre and M. Bernard. The CATHARE code strategy and assessment. *Nuclear engineering and design*, 124(3) :257–284, 1990.
- [2] J. Bear. *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation, 1972.
- [3] M. Belliard. Méthodes de décomposition de domaine et de frontière immergée pour la simulation des composants nucléaires. *Habilitation à Diriger des Recherches*, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01085328>, 19 novembre 2014.
- [4] F. Blondel, B. Audebert, T. Pasutto, and M. Stanciu. Condensation models and boundary conditions for non-equilibrium wet steam flows. *International Journal on Finite Volumes*, 10, 2013.
- [5] N. Botta, R. Klein, S. Langenberg, and S. Lützenkirchen. Well balanced finite volume methods for nearly hydrostatic flows. *Journal of Computational Physics*, 196(2) :539–565, 2004.
- [6] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws : And well-balanced schemes for sources*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [7] R. H. Brooks and A. T. Corey. Properties of porous media affecting fluid flow. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 92(2) :61–90, 1966.
- [8] G. Le Coq, S. Aubry, J. Cahouet, P. Lequesne, G. Nicolas, and S. Pastorini. The THYC computer code. A finite volume approach for 3 dimensional two-phase flows in tube bundles. *Bulletin de la Direction des études et recherches - Electricité de France. Série A, nucléaire, hydraulique, thermique*. In french, page 61–76, 1989.
- [9] F. Dubois. Boundary conditions and the Osher scheme for the Euler equations of gas dynamics. *Internal Report CMAP 170, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France*, 1987.
- [10] F. A. L. Dullien. *Porous Media-Fluid Transport and Pore Structure*. Academic Press, 1992.
- [11] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. On the use of symetrizing variables for vacuums. *Calcolo*, 40 :163–194, 2003.
- [12] L. Girault and J.-M. Hérard. A two-fluid hyperbolic model in a porous medium. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 44 :1319–1348, 2010.

- [13] L. Girault and J.-M. Hérard. Multidimensional computations of a two-fluid hyperbolic model in a porous medium. *International Journal on Finite Volumes*, <http://ijfv.episciences.org/>, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01114209v1>, 7 :1–33, 2010.
- [14] L. Gosse. A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *Computers & Mathematics with Applications*, 39(9) :135–159, 2000.
- [15] L. Gosse. A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 11 :339–365, 2001.
- [16] M. Grandotto-Bietoli. Simulation numérique des écoulements diphasiques dans les échangeurs. *Habilitation à Diriger des Recherches.*, 6 avril 2006.
- [17] W. G. Gray and S. M. Hassanizadeh. Macroscale continuum mechanics for multiphase porous-media flow including phases, interfaces, common lines and common points. *Advances in Water Resources*, 21(4) :261–281, 1998.
- [18] J.-M. Greenberg and A. Y. Leroux. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33 :1–16, 1996.
- [19] R. A. Greenkorn. *Flow phenomena in porous media : fundamentals and applications in petroleum, water and food production*. Marcel Dekker, New York, NY, USA, 1983.
- [20] P. Helluy, J.-M. Hérard, and H. Mathis. A well-balanced approximate riemann solver for compressible flows in variable cross-section ducts. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(7) :1976–1992, 2012.
- [21] I. E. Idel’Cik. Memento des pertes de charge. *Collection de la Direction des Etudes et Recherches d’Electricite de France*, Paris : Eyrolles, 1969.
- [22] A. R. Khaled and K. Vafai. The role of porous media in modeling flow and heat transfer in biological tissues. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(26) :4989–5003, 2003.
- [23] Code-Saturne 4.0. Theory Manual. <http://code-saturne.org/cms/sites/default/files/docs/4.0/theory.pdf>. available on <http://code-saturne.org/>, 2015.
- [24] S. Noelle, N. Pankratz, G. Puppo, and J. R. Natvig. Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows. *Journal of Computational Physics*, 213(2) :474–499, 2006.
- [25] K. Pruess. A practical method for modeling fluid and heat flow in fractured porous media. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 25(01) :14–26, 1985.
- [26] I. Toumi, A. Bergeron, D. Gallo, E. Royer, and D. Caruge. Flica-4 : a three-dimensional two-phase flow computer code with advanced numerical methods for nuclear applications. *Nuclear Engineering and Design*, 200 :139–155, 2000.

Table des matières

Résumé	3
0 Introduction	13
1 Une nouvelle approche intégrale volumes finis	29
Appendices	59
A Présentation des résultats	61
A.1 Cas test 01 : ODC à droite, contraction à droite, 1/0.5	63
A.2 Cas test 02 : ODC à droite, contraction à droite, 1/0.01	66
A.3 Cas test 03 : ODD à droite, contraction à droite, 1/0.5	69
A.4 Cas test 04 : ODD à droite, contraction à droite, 1/0.01	72
A.5 Cas test 05 : ODC à droite, contraction à gauche, 0.5/1	75
A.6 Cas test 06 : ODC à droite, contraction à gauche, 0.01/1	78
A.7 Cas test 07 : ODD à droite, contraction à gauche, 0.5/1	81
A.8 Cas test 08 : ODD à droite, contraction à gauche, 0.01/1	84
A.9 Cas test 09 : ODC à droite, contraction à droite, 1/0.1	87
A.10 Cas test 10 : ODC à droite, contraction à droite, 1/0.9	90
A.11 Cas test 11 : ODD à droite, contraction à droite, 1/0.1	93
A.12 Cas test 12 : ODD à droite, contraction à droite, 1/0.9	96
A.13 Cas test 13 : ODC à droite, contraction à gauche, 0.1/1	99
A.14 Cas test 14 : ODC à droite, contraction à gauche, 0.9/1	102
A.15 Cas test 15 : ODD à droite, contraction à gauche, 0.1/1	105
A.16 Cas test 16 : ODD à droite, contraction à gauche, 0.9/1	108
2 Une approche intégrale multi-dimensionnelle	111
Appendices	153
B Présentation des résultats	155
B.1 Cas test 1 : modèle inter-canaux.	155
B.1.1 L'expérience.	155
B.1.2 Simulation 1 : un maillage trop grossier.	158

B.1.3	Simulation 2 : un maillage grossier adapté	161
B.1.4	Simulation 3 : un maillage plus fin	165
B.1.5	Simulation 4 : un maillage encore plus fin	169
B.1.6	Simulation 5 : un autre maillage relativement fin	173
B.1.7	Simulation 6 : simulation sur maillage adapté au domaine	177
B.1.8	Simulation 7 : robustesse du code lors de la présence de faibles taux de porosité	181
B.2	Cas test 2 : transition milieu fluide / milieu poreux.	186
B.2.1	L'expérience.	186
B.2.2	Simulation 1 : calcul sur maillage grossier	187
B.2.3	Simulation 2 : calcul sur maillage adapté	190
B.2.4	Simulation 3 : calcul sur maillage adapté, avec test de robustesse	192
B.2.5	Simulation 4 : calcul sur maillage adapté, avec un second test de robustesse	194
B.2.6	Simulation 5 :	197
B.2.7	Simulation 6 :	199
B.2.8	Simulation 7 :	201
B.2.9	Simulation 8 :	203
3	Une formulation intégrale implicite	207
4	Conclusion et perspectives	239

Chapitre 1 :

Une approche intégrale volumes finis pour la simulation des écoulements fluides en conduite à section variable

Ce chapitre est dédié à l'introduction d'une nouvelle approche simple en vue d'améliorer l'approximation des écoulements fluides en conduite unidimensionnelle à section variable. Cette nouvelle approche est basée sur une formulation intégrale 1D en volumes finis, compatible avec tout type de système de lois de conservation et adaptable à tout type de modèle thermodynamique.

Le domaine est donc une conduite à section variable, le principe de la méthode est de repartir d'un modèle multidimensionnel de type Navier-Stokes ou Euler classique, et d'intégrer le système d'équations en temps et en espace sur le volume occupé par le fluide dans la cellule, afin d'obtenir une formulation intégrale simple et unidimensionnelle prenant en compte toutes les contributions fluides et solides aux frontières de la cellule.

Cette nouvelle approche a été testée tout d'abord dans un cas d'écoulement *stationnaire* en conduite à section régulière, puis dans plusieurs cas *instationnaires* en conduite à section discontinue. Dans le cas à section régulière, on simule en utilisant la nouvelle approche l'écoulement d'un fluide stationnaire dans une tuyère de Laval, et on compare les résultats obtenus à la solution analytique. Dans le cas d'écoulements instationnaires en conduite à section discontinue, on met en place l'expérience du tube à choc de Sod. Sachant que l'on ne dispose d'aucune solution analytique en section discontinue, les résultats obtenus à partir de la nouvelle approche ont été comparés aux résultats de deux autres approches : l'une classique utilisant le formalisme à section variable et un schéma "well-balanced" ; l'autre étant la solution "de référence" multidimensionnelle obtenue sur maillage très fin.

Ce chapitre correspond à un article soumis en version révisée à la revue *Computers & Fluids*. Une version courte de ce travail a fait l'objet d'une présentation au congrès FVCA7 à Berlin, en Juin 2014, sous le titre "*A simple finite volume approach to compute flows in variable cross-section ducts*", co-écrit par B. Audebert, J-M. Hérard, X. Martin et O. Touazi, que l'on peut retrouver dans le proceeding *Finite Volume for Complex Applications VII - Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems* (Springer, pages 769-777, 2014).

A simple integral approach to compute flows in ducts with variable cross-section

Bruno Audebert, Jean-Marc Hérard, Xavier Martin, Ouardia Touazi

Keywords:

Finite Volumes/ well-balanced scheme / integral formulation / variable cross-section / Euler equations / Riemann problem.

Abstract We introduce in this paper a new approach based on an integral formulation in order to get a relevant approximation of the mean flow patterns in one-dimensional ducts with variable cross-sections. Numerical results are compared with those obtained by using the standard one-dimensional formulation associated with a well-balanced scheme, and also with numerical results provided by a multi-dimensional code. The comparison includes ducts with smooth or discontinuous cross sections. This new formulation is shown to be robust wrt to sudden and high cross-section variations, even when a total obstruction occurs, and to be accurate when compared with the reference solution.

Bruno Audebert, Ouardia Touazi
EDF R&D, Fluid Dynamics, Power Energy and Environment, 6 quai Watier, F78400, Chatou.

Jean-Marc Hérard, Xavier Martin
EDF R&D, Fluid Dynamics, Power Energy and Environment, 6 quai Watier, F78400, Chatou,
and:

Institut de Mathématiques de Marseille, Equipe Analyse Appliquée, UMR CNRS 7353, 39
rue Joliot Curie, F13453 Marseille cedex 13.

Corresponding author : jean-marc.herard@edf.fr

1 Introduction

The approach that is classically retained in order to compute flows of a compressible fluid in variable cross-section ducts basically relies on the computation of approximate solutions of the following system of partial differential equations:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho S(x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S(x)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u S(x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 S(x)}{\partial x} + S(x) \frac{\partial P}{\partial x} = D(W)S(x) \\ \frac{\partial E S(x)}{\partial t} + \frac{\partial u(E+P)S(x)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

where ρ, u, Q, P, E respectively denote the density, the velocity, the momentum ($Q = \rho u$), the pressure and the total energy of the fluid, when focusing on a single-phase model ; in this formulation, $S(x)$ stands for the cross-section area, and the total energy is:

$$E = \rho(\varepsilon(\rho, P) + U^2/2),$$

for a given equation of state where the internal energy $\varepsilon(\rho, P)$ is prescribed by the user. The contribution $D(W)$ enables to take regular head losses into account if necessary ; these may be due to viscous effects on the lower and upper wall boundaries of the duct. A classical closure law is in that case :

$$D(W) = -K(W)|u|u$$

where $K(W)$ is a positive scalar function. This one-dimensional approach is of course very useful in many practical and industrial situations, where there is no specific need to get a detailed evaluation of transverse components. This is true for many medical applications, for flows of oil-gas mixtures in pipelines in the oil industry, or water flows in complex networks for agriculture purposes or for electric companies. However, many practical situations often involve sudden contractions and/or enlargements of the duct cross-section. This in turn introduces two new difficulties. Firstly, one usually needs to introduce additional terms in the former system in order to account for so-called singular head losses. Then one has to handle these generally stiff contributions when developing a numerical method.

Whenever additional source terms $D(W)$ are neglected or not, a generic numerical approach has been proposed some time ago, which is grounded on the well-balanced ideas introduced in [16]. Actually several useful and efficient algorithms have been proposed during the last twenty years in that direction. We may refer for instance to [16, 15, 14, 24, 21, 18, 20, 5, 17, 7], where the main ingredient consists in introducing a new fictitious variable $S(x, t)$, writing a new simple PDE:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

At the discrete level, the cross section is assumed to be uniform within each Finite Volume cell. A straightforward consequence in that case is that the non-conservative term $S \frac{\partial P}{\partial x}$ in the momentum equation now clearly contributes to the convective budget. However, a first difficult point immediately arises, since one obviously needs to define appropriate and unique jump conditions around the sudden cross-section variations; a widespread approach consists in using a connection of states around the cross-section discontinuity, by enforcing the preservation of Riemann invariants of the standing wave. This makes sense for subsonic flows since the -single- field associated with the standing wave is linearly degenerated. A remaining difficulty for sonic and supersonic flows is about the non-uniqueness of solutions of the associated one-dimensional Riemann problem; for this specific problem of the -local in time- occurrence of the resonance phenomenon, we refer for instance to [13]. As a matter of fact, it has been checked in [11] that the well-balanced Rusanov scheme introduced in [21] guarantees the convergence towards the unique subsonic solution, whereas standard schemes that do not satisfy the well-balanced property converge (when the mesh size tends to 0) towards a wrong solution. Another similar verification has been achieved in [17] when focusing on a well-balanced VFRoe-ncv scheme. On the whole, this means that suitable -well-balanced- numerical tools can provide meaningful and convergent approximations of solutions of this system.

However, it has also been pointed out in [12] that the true multi-dimensional solutions do not comply with the modelling of the vicinity of the cross-section discontinuity. This indeed is not a very surprising result, and it was expected. Actually, noting as usual:

$$H = (E + P)/\rho,$$

a reasonable guess is that the mean axial momentum QS and the mean total energy flux QSH , which are two among the three Riemann invariants of the standing wave, are indeed preserved across any cross-section restriction; nonetheless, the failure in the modelling is due to the last Riemann invariant.

Thus, at least two possible ways to circumvent this problem may be suggested. A first one would consist in enforcing a local and singular momentum head loss, in order to recover the reality of the flow. This might be achieved by using relevant engineer closure laws (see for instance [19]), or by providing some adaptative and suitable closure law -to be defined-; in that case, one should also need to derive a new well-balanced scheme in order to preserve this new connection through the standing wave (see [9]). The second one, that is considered afterwards, is more straightforward: it simply consists in a reformulation of the one-dimensional problem, thus accounting for sudden variations in a very simple "multi-dimensional" spirit. A straightforward consequence is that singular sources are automatically computed. Another consequence is that this approach is valid for any EOS, and may be extended quite easily, for instance to the framework of multi-phase flow models.

Hence the paper is organised as follows. We first present the modified one-dimensional approach in section 2. Afterwards, we check that this formulation is suitable when one aims at computing approximate solutions of ρ, Q, E when the cross section is smooth. Next, we turn to unsteady approximate solutions obtained in a sudden contraction/enlargement, and a comparison is made between:

1. the true multi-dimensional solution obtained on a very fine grid, which will be referred to as the "reference" solution;
2. the classical one-dimensional well-balanced approach associated with the simulation of solutions of (1);
3. the new one-dimensional formulation, considering coarse or fine grids.

Several test cases are considered in that section. We will conclude by emphasizing the main advantages and drawbacks of the different one-dimensional approaches.

2 A simple one-dimensional Finite Volume scheme

In order to simplify the presentation, we focus in this paper on the inviscid Euler model for compressible flows of a single-phase fluid. Thus the main unknowns in a three-dimensional framework are the density ρ , the three components of the velocity \underline{U} and of the momentum $\underline{Q} = \rho \underline{U}$, the pressure P and the mean total energy E :

$$E = \rho((\underline{u})^2/2 + \varepsilon(P, \rho)).$$

The speed of acoustic waves is:

$$\rho c^2 = \left(\frac{P}{\rho} - \rho \frac{\partial \varepsilon(P, \rho)}{\partial \rho} \right) / \left(\frac{\partial \varepsilon(P, \rho)}{\partial P} \right)$$

with $\varepsilon(P, \rho)$ the internal energy given by the user. The governing equations read:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{Q}) = 0 \\ \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{Q} \otimes \underline{u}) + \nabla P = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{Q} H) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

where again the total enthalpy H is:

$$H = (E + P)/\rho$$

We consider control volumes as depicted on *Figure 1*, and we integrate (2) from time t^n to t^{n+1} . Thus, noting:

$$\Omega_i^\varphi = S_i \times h_i$$

the volume occupied by the fluid within the i -cell, we get at time $t = t_p$:

$$\Omega_i^\varphi \Phi_i^p = \int_{\Omega_i^\varphi} \Phi(\underline{x}, t_p) dV,$$

for: $\Phi = \rho, \underline{Q}, E$.

Using previous definitions, and noting $\Gamma(i)$ the boundary of the control volume Ω_i , standard calculations enable to derive the following update:

$$\begin{cases} \Omega_i^\varphi (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) + \int_{[t^n, t^{n+1}]} \int_{\Gamma(i)} (\underline{Q} \cdot \underline{n})(\underline{x}_\Gamma, t) d\Gamma dt = 0 \\ \Omega_i^\varphi (\underline{Q}_i^{n+1} - \underline{Q}_i^n) + \int_{[t^n, t^{n+1}]} \int_{\Gamma(i)} ((\underline{Q} \cdot \underline{n}) \underline{u} + P \underline{n})(\underline{x}_\Gamma, t) d\Gamma dt = 0 \\ \Omega_i^\varphi (E_i^{n+1} - E_i^n) + \int_{[t^n, t^{n+1}]} \int_{\Gamma(i)} ((\underline{Q} \cdot \underline{n}) H)(\underline{x}_\Gamma, t) d\Gamma dt = 0 \end{cases} \quad (3)$$

As shown in figure 1, the boundary $\Gamma(i) = \Sigma_j \Gamma_{ij}$ consists in three distinct parts corresponding to:

- (i) the upper and lower wall boundaries, through which the normal mass flux is null;
- (ii) $\Gamma_{i+1/2}^\varphi$ (respectively $\Gamma_{i-1/2}^\varphi$) where the fluid may flow in the x direction between cells i and $i+1$ (respectively between cells $i-1$ and i);
- (iii) walls boundaries aligned with the y direction between cell Ω_i and its neighbouring cells Ω_{i-1} and Ω_{i+1} , through which the normal mass flux is again equal to 0, and the surfaces of which are $\max(0, (S_i - S_{i-1}))$ and $\max(0, (S_i - S_{i+1}))$ respectively,

so that :

$$S_i = \text{mes}(\Gamma_{i-1/2}^\varphi) + \max(0, (S_i - S_{i-1})) = \text{mes}(\Gamma_{i+1/2}^\varphi) + \max(0, (S_i - S_{i+1})).$$

These definitions make sense, whatever the triple (S_{i-1}, S_i, S_{i+1}) is, even when one among these is equal to 0.

Thus, setting $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$, and denoting $V(i)$ the set of neighbouring cells of cell i , including the wall "mirror" cells associated with the wall boundaries of cell i , the Finite Volume scheme is as follows:

$$\begin{cases} \Omega_i^\varphi (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) + \Delta t^n \sum_{j \in V(i)} (\underline{Q} \cdot \underline{n})_{ij}^h \Gamma_{ij} = 0 \\ \Omega_i^\varphi (\underline{Q}_i^{n+1} - \underline{Q}_i^n) + \Delta t^n \sum_{j \in V(i)} ((\underline{Q} \cdot \underline{n}) \underline{u} + P \underline{n})_{ij}^h \Gamma_{ij} = 0 \\ \Omega_i^\varphi (E_i^{n+1} - E_i^n) + \Delta t^n \sum_{j \in V(i)} ((\underline{Q} \cdot \underline{n}) H)_{ij}^h \Gamma_{ij} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

In the latter formulation, the fluxes $(\phi)_{ij}^h$ denote suitable explicit numerical fluxes. These may be obtained using either a Godunov scheme, a Rusanov scheme or an approximate Godunov scheme. In practice, we will concentrate herein on a hybrid formulation where the numerical fluxes on fluid/fluid interfaces $\Gamma_{i+1/2}^\varphi$ will be obtained with the approximate Godunov scheme [10], and the numerical fluxes on fluid/solid interfaces will correspond to the exact Godunov fluxes. An alternative practical choice might be to replace the approximate Godunov scheme at fluid/fluid interfaces by a Rusanov (respectively exact Godunov) scheme, but this would of course decrease the overall accuracy (respectively increase the computational cost) of computations.

Before going further on, we introduce classical notations below:

$$\underline{\psi} \cdot \underline{n}_x = \psi_x \quad \underline{\psi} \cdot \underline{n}_y = \psi_y$$

for $\underline{\psi}$ equal to \underline{Q} or \underline{u} . We also assume that the initial condition at the beginning of the computation t^0 is such that the transverse velocity in the y -direction is null in all computational cells: $U_{yi}^0 = 0$.

2.1 Mass and energy discrete balance equations

Since discrete normal fluxes are null at wall boundaries, the mass balance discrete equation is simply the following:

$$\Omega_i^\varphi (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) + \Delta t^n \left((\rho u_x)_{i+1/2}^h \Gamma_{i+1/2}^\varphi - (\rho u_x)_{i-1/2}^h \Gamma_{i-1/2}^\varphi \right) = 0 \quad (5)$$

while noting:

$$\Gamma_{i+1/2}^\varphi = \min(S_i, S_{i+1})$$

A similar straightforward calculation leads to the discrete energy balance equation:

$$\Omega_i^\varphi (E_i^{n+1} - E_i^n) + \Delta t^n \left((\rho H u_x)_{i+1/2}^h \Gamma_{i+1/2}^\varphi - (\rho H u_x)_{i-1/2}^h \Gamma_{i-1/2}^\varphi \right) = 0 \quad (6)$$

2.2 Momentum balance discrete equations

We first prove that the flow remains such that the discrete y-momentum $(Q_y)_i^n$ remains null. Actually, the dot product of the second equation in 4 with the unit vector $\underline{j} = (0, 1)$ yields:

$$\Omega_i^\varphi ((Q_y)_i^{n+1} - (Q_y)_i^n) + \Delta t^n \sum_{j \in V(i)} ((\underline{Q} \cdot \underline{n})(u_y) + P \underline{n} \cdot \underline{j})_{ij}^h \Gamma_{ij}^\varphi = 0$$

For all wall boundaries, the Godunov scheme computes $(\underline{Q} \cdot \underline{n})_{i,wall}^h = 0$; moreover, the exact Godunov scheme (or approximate Godunov scheme [10]) also provides zero contributions for fluxes $((\underline{Q} \cdot \underline{n})(u_y))_{i \pm 1/2}^h$ on the vertical fluid/fluid interfaces $\Gamma_{i \pm 1/2}^\varphi$, as soon as u_y is equal to zero. On the other hand, the scalar product $\underline{n} \cdot \underline{j}$ is null everywhere except on the lower and upper wall boundaries; however, the exact Godunov value of the wall pressure will be equal to the cell pressure as soon as $(u_y)_i^n$ is equal to zero; hence, the budget will cancel when summing up on both lower and upper frontiers. On the whole, we can conclude that:

$$\Omega_i^\varphi ((Q_y)_i^{n+1} - (Q_y)_i^n) = 0$$

and thus :

$$(Q_y)_i^{n+1} = 0$$

if $(Q_y)_i^n = 0$. This completes the proof.

Eventually, the discrete x-momentum balance for $Q_x = \rho u_x$ will take the form:

$$\begin{aligned} \Omega_i^\varphi (Q_{x_i}^{n+1} - Q_{x_i}^n) + \Delta t^n \left((\rho u_x^2 + P)_{i+1/2}^h \Gamma_{i+1/2}^\varphi - (\rho u_x^2 + P)_{i-1/2}^h \Gamma_{i-1/2}^\varphi \right) \\ + \Delta t^n P_{i+\frac{1}{2},i}^* \left(S_i - \Gamma_{i+1/2}^\varphi \right) - \Delta t^n P_{i-\frac{1}{2},i}^* \left(S_i - \Gamma_{i-1/2}^\varphi \right) = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

where $P_{i\pm\frac{1}{2},i}^*$ stands for an estimation of the pressure on the wall boundary $i \pm 1/2$.

On the whole, the set of equations (5),(7),(6) enables to update values of the density ρ , x - momentum Q_x and total energy E .

2.3 Estimations of the pressure of the wall boundary

This estimation requires to specify the EOS. We give below formulas associated with a perfect gas EOS (see [4] for details):

$$P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon(P, \rho).$$

We get for $S_i > S_{i+1}$:

- if $M_i = \frac{u_i^n}{c_i^n} < 0$, then: $P_{i+\frac{1}{2},i}^* = \begin{cases} P_i^n \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} & \text{if } 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
- if $M_i = \frac{u_i^n}{c_i^n} > 0$, then: $P_{i+\frac{1}{2},i}^* = P_i^n \left(1 + \gamma M_i \left(1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16} M_i^2 \right)^{1/2} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M_i^2 \right)$

and a similar result holds when $S_i < S_{i+1}$.

Very similar results can be obtained when using a stiffened gas EOS -which is useful for almost incompressible flow calculations-, that is:

$$P + \gamma P_\infty = (\gamma - 1)\rho\varepsilon(P, \rho).$$

where P_∞ is a positive constant.

For more general EOS, more complex formulas may be obtained ([1]), using the Riemann invariant parametrization of the fast waves associated with $\lambda = u \pm c$ when $\underline{u} \cdot \underline{n}_{wall} \leq 0$, and shock connections when the flow locally hits the wall boundary (when $\underline{u} \cdot \underline{n}_{wall} > 0$).

2.4 Remarks

1. A first remark concerns other simpler estimations of the wall pressure. At first, it may be argued that $M_i = \frac{u_i^n}{c_i^n}$ in fact corresponds to the normal Mach number $\mathcal{M}_i = \frac{(\underline{u} \cdot \underline{n})_i^n}{c_i^n}$; thus it is expected to be rather small, at least for fine enough meshes, since the mass flux $\underline{u} \cdot \underline{n}$ is null at the wall boundary. Hence, it seems appealing to replace the exact Godunov value of the wall pressure by some rough approximation, setting M_i to 0, which yields:

$$P_{i+\frac{1}{2},i}^* = P_i^n$$

when $S_i > S_{i+1}$ whatever the sign of $(\underline{u} \cdot \underline{n})_i^n$ is.

Even more, an obvious candidate for the wall pressure estimate can be provided by approximate Riemann solvers. For instance, the approximate Godunov scheme [10] computes a numerical wall pressure which is close to the one detailed above, since it computes:

$$P_{wall}^{VFRoe-ncv} = P_i^n (1 + \gamma M_i).$$

whenever M_i is positive or negative. As it can be easily noticed, this expression exactly corresponds to a first-order expansion of the exact Godunov value detailed above, with respect to the mach number M_i .

2. Another remark pertains to a suitable definition of the time step. Depending on the choice of numerical fluxes at the fluid interfaces, CFL-like conditions must be introduced in order to guarantee positive discrete values of the density ρ_i^n . For instance, when focusing of the Rusanov flux scheme:

$$f_{i+1/2}^n = \left(F(W_i^n) + F(W_{i+1}^n) - r_{i+1/2}^n (W_{i+1}^n - W_i^n) \right) / 2$$

(where $r_{i+1/2}^n = \max(r(W_i^n), r(W_{i+1}^n))$, and $r(W)$ stands for the spectral radius of the Jacobian matrix $\frac{\partial F(W)}{\partial W}$), the classical one-dimensional $CFL_{Rusanov}$ condition that guarantees $0 \leq \rho_i^{n+1}$ if $0 \leq \rho_i^n$ (for all cells):

$$\Delta t^n (r_{i+1/2}^n + r_{i-1/2}^n) \leq 2h_i$$

should be replaced by the following $CFL1D+Rusanov$ condition on the time step:

$$\Delta t^n \left(r_{i+1/2}^n \Gamma_{i+1/2}^\varphi + r_{i-1/2}^n \Gamma_{i-1/2}^\varphi + u_i^n (\Gamma_{i+1/2}^\varphi - \Gamma_{i-1/2}^\varphi) \right) \leq 2\Omega_i^\varphi$$

This result can be classically obtained, using equation (5) and rewriting the latter in the form:

$$\rho_i^{n+1} = a_i^n \rho_i^n + b_i^n \rho_{i-1}^n + c_i^n \rho_{i+1}^n.$$

It can then be checked that both b_i^n and c_i^n are positive without any condition, whereas $0 \leq a_i^n$ if and only if the condition $(CFL1D+_{Rusanov})$ holds. Thus the new CFL condition is a little bit more restrictive than the one associated with the pure one-dimensional case; however, for smooth variations of the cross-section, we retrieve almost the same condition on the time step.

3 Numerical results

In the following next two subsections, we will discuss results that have been obtained while computing approximations of Euler equations for a compressible fluid.

The first subsection is devoted to the steady flow in a nozzle, restricting to the case where a shock occurs in the divergent part of the nozzle. This includes a study of the numerical convergence with respect to the mesh size.

The second subsection is the most important one, since it examines the behaviour of the present integral approach when computing the flow in a duct with a sudden contraction/enlargement. The latter subsection also contains a thorough comparison with:

- the reference solution obtained by computing the two-dimensional set of Euler equations on a very fine mesh, using the approximate Godunov scheme [10];
- the approximation obtained with the classical one-dimensional system (1), using the well-balanced scheme [21].

For all test cases, we have used a perfect gas equation of state, setting: $\gamma = 7/5$. In all cases the CFL constant has been set to $1/2$.

3.1 Steady flow in Laval nozzle

This flow is subsonic in the convergent part of the nozzle, sonic at the nozzle throat, supersonic before the shock location, and then subsonic until the exit. The approximate solution obtained with the integral approach is compared with the exact solution, which is classical and is not recalled herein. We emphasize that a very accurate treatment of inlet and outlet boundary conditions is mandatory in order to get a relevant approximation. For that topic we refer for instance to [1] and references therein. Several meshes have been considered for that purpose ; we provide here numerical approximations corresponding to four meshes including 100, 1000, 10000 and 50000 cells respectively.

Inlet boundary conditions are derived using an upstream reservoir condition, where the fluid is at rest, and the pressure and total enthalpy are:

$$P_0 = 10^5 Pa \quad \text{and} \quad H_0 = 294615.75.$$

The outlet boundary condition is:

$$P_{outlet} = 75 \times 10^3 Pa.$$

Initial conditions are chosen as follows:

$$U_x(x, t = 0) = 0, \quad P(x, t = 0) = 10^5 Pa, \quad T(x, t = 0) = 293.15 K$$

The wall boundary estimate for the pressure in cell i is chosen as :

$$P_{i+\frac{1}{2},i}^* = P_{i-\frac{1}{2},i}^* = P_i^n.$$

Figures 2, 3, 4, 5 respectively provide the mean pressure, the density, the Mach number and the velocity of the fluid when the flow is steady, while restricting to Rusanov scheme. Computational results obtained with 100 and 50000 cells are provided, together with the exact steady solution. A comparison of convergence rates in L^1 norm for pressure, velocity and density variables obtained with Rusanov scheme and $VF\text{Roe}_{ncv}$ scheme is given on figure 6. The convergence rate is clearly 1 for both schemes, which was expected for this steady case with a first-order scheme. Obviously $VF\text{Roe}_{ncv}$ scheme is a bit more accurate than Rusanov scheme for a given mesh size. Of course, for this kind of application in smooth cross-section ducts, many other schemes behave quite well too (see for instance [8, 24, 21, 5, 1], among others).

3.2 Unsteady flow of a compressible fluid with abrupt cross-section variations

We turn now to the computation of unsteady flows of a compressible fluid in duct including a sudden contraction/enlargement. A comparison of three distinct approaches is now considered.

- At first, a *reference solution* is computed, which corresponds to the simulation of the Euler equations 2 in a two-dimensional framework, using one million cells and the approximate Godunov scheme [10];
- We compute then approximations of the classical set of one-dimensional equations (1), using various meshes and the well-balanced Rusanov scheme introduced in [21], the verification of which can be found in [11];
- The third series of approximations corresponds to the numerical approximations obtained with our integral approach, thus computing discrete values with (5),(7),(6) using coarse or fine one-dimensional meshes.

The experimental setup is a one-dimensional pipe with a sudden contraction located at $x_c = 0.8$ (see Figure 7). Thus the cross section is:

$$S(x < x_c) = S_l \quad \text{and} : \quad S(x > x_c) = S_r$$

When starting the computation, the initial membrane situated at $x_m = 0.7$ separates two distinct initial states (ρ_L, u_L, P_L) and (ρ_R, u_R, P_R) . Depending on this choice, two

situations may be considered.

In the first one, where:

$$(\rho_L, u_L, P_L) = (1, 0, 10^5)$$

and:

$$(\rho_R, u_R, P_R) = (0.125, 0, 10^4).$$

and restricting to the beginning of the computation, a right-going shock wave propagates towards the right direction, and is followed by a contact discontinuity; meanwhile, a rarefaction wave travels towards the left boundary. Then the right-going *shock* wave hits the sudden contraction, and a reflected wave and a transmitted wave respectively travel to the left and right side of the contraction $x = x_c$.

Of course, left and right initial states (ρ_L, u_L, P_L) and (ρ_R, u_R, P_R) can be permuted. In that case, the *smooth* right-going rarefaction wave interacts with the sudden contraction; again two reflected and transmitted waves occur.

We examine these two configurations in the sequel; moreover, two different cross-section ratios are considered in this subsection:

$$S_l/S_r = 2$$

and:

$$S_l/S_r = 100$$

The finest (respectively coarsest) one-dimensional mesh that is used for both the classical approach -with the well-balanced scheme- and the integral approach contains 50000 (respectively 100) regular cells.

The pressure estimate that is used for all computations at the wall-boundary is either the rough approximation retained in the former subsection:

$$P_{i+\frac{1}{2},i}^* = P_{i-\frac{1}{2},i}^* = P_i^n.$$

or the more accurate Riemann wall-boundary expression detailed in section 2.3.

3.2.1 A shock wave hits a section contraction

First test case 1: $S_l/S_r = 2$:

This corresponds to a rather classical situation arising in many practical simulations. We plot on Figure 8 the density profiles at time $t = T_0 = 1.5 \times 10^{-3}$. We note that:

- The **red** and **green** curves correspond to the integral approach when using a mesh with 50000 (respectively 1000) cells ; the **blue** curve refers to the approximation obtained with the wall estimate of the pressure provided in section 2.3 with the finer mesh;
- Approximations associated with the **magenta** curve have been obtained with the classical approach and the well-balanced scheme;
- The black curve gives the mean value of the reference solution in the section.

When using the rough approximation of the wall pressure, (thus setting M_i to 0 in formulas of section 2.3), it appears that the integral approach provides a very nice approximation of the reference solution, which is indeed much better than the classical approach with the well-balanced scheme. This remains true even when the mesh is coarse (see figure 8, with one thousand cells). We also plot the velocity/pressure/entropy profiles on figures 9, 10, 11. Similar comments hold when comparing the three approaches (reference solution, integral approach and classical approach). Figure 12 gives the behaviour of the wall pressure estimate (rough estimate $P_{wall} = P_i^n$ and Riemann value detailed in section 2.3) wrt time, and it also provides a comparison with the wall pressure computed by the code that solves two-dimensional Euler equations.

Second test case: $S_l/S_r = 100$:

When the cross-section contraction is much higher, the well-balanced scheme fails at providing approximations as soon as the shock wave hits this contraction. We emphasize that the same trouble arises when using the well-balanced approximate Godunov scheme [17]. In practice, when the numerical shock wave hits the contraction, the non linear solver that computes values of the density solution of $f_{-,+}(\rho) = 0$ on both sides of cell interfaces (see [21] and also, [17] section 3.2, [11] appendix C, or [12] appendix D) no longer finds any positive solution. Tentative cures that enforce the minimal value ρ_{min} such that $f_{-,+}(\rho_{min}) = \min_{x \in R^+} f_{-,+}(x)$ also lead to a failure of the code.

For this second test case, we thus only compare profiles:

- when using the integral approach and a mesh including 50000 cells: the black **dotted** curve displays results corresponding to the rough wall pressure estimate $P_{wall} = P_i^n$ in cell i at time t^n , and the black **dashed** curve refers to the approximation obtained with the wall pressure estimate in section 2.3;
- The black curve gives the mean value of the reference solution in the section.

Actually, computational approximations are close to one another in this second test case (see figure 13). The comparison with the reference multi-dimensional solution is really fair. This is also true for the remaining pressure/velocity components. Figure 14 is the counterpart of the previous one Figure 12 for this second test case; the

three estimates of the wall pressure hardly differ in that case, which was expected due to the high cross section contraction.

3.2.2 A rarefaction wave hits a section contraction

The experimental setup is still the same, but initial states on both sides of the membrane are now:

$$(\rho_L, u_L, P_L) = (0.125, 0, 10^4)$$

and:

$$(\rho_R, u_R, P_R) = (1, 0, 10^5).$$

The cross section is the same as in test case 1, which means that:

$$S_l/S_r = 2$$

This test is interesting, since the incoming wave that meets the sudden contraction is smooth now (it is a right-going rarefaction wave). Thus one expects that more or less, all computations will lead to similar results. We emphasize that the well-balanced scheme computes this situation, on any mesh, and hence we can again compare on figure 15:

- Results obtained with the integral approach when using a mesh with 50000 cells, and considering the exact Riemann estimate for the wall pressure or its rough approximation $P_{wall} = P_i^n$ in cell i at time t^n ;
- Approximations associated with the classical approach and the well-balanced scheme;
- The y averaging of the reference two-dimensional solution.

We can observe velocity and pressure numerical approximations on Figures 16 and 17. We also recall the basic Riemann solution (in yellow) at some earlier time $t = 0.131 \times 10^{-3}$ when the position x_r of the head of the right-going rarefaction wave is smaller than x_c . Figure 18 also details the wall pressure computed by the two slightly different integral approaches. Once more, the prediction provided by the classical approach and the well-balanced scheme is far less accurate than the integral approach, whatever the wall pressure estimate is. This remains unchanged independently of the mesh refinement. In particular, the reflected wave (for $x < x_c$) has not the correct tendencies, whereas the transmitted wave (for $x > x_c$) is rather good in all situations.

4 Conclusion

Focus has been given in this paper on the one-dimensional approximation of single-phase fluid flows, but obviously, this approach may be extended to two-phase flow models in a straightforward manner. This is for instance true for standard conservative homogeneous models, but also for Baer-Nunziato type models ([3, 6]). Nonetheless, in the latter case, the occurrence of non-conservative terms in the multi-dimensional model introduces an additional small difficulty that can be managed rather easily in a meaningful way. The present one-dimensional Finite Volume approach is very simple and rather efficient, as it has been shown in section 3. This claim is also confirmed by numerous computations described in [23], where sixteen different situations have been investigated, considering eight contractions:

$$S_l/S_r = \frac{1}{100}; \quad \frac{1}{10}; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{9}{10};$$

and:

$$S_l/S_r = \frac{10}{9}; \quad 2; \quad 10; \quad 100.$$

Scheme *FV1D+* simply relies on an integral formulation on specific Finite Volumes, and it requires to give a suitable approximate value of the wall pressure in the multi-dimensional framework. It has been emphasized herein that the local -in cell-value of the pressure is indeed a fair candidate.

Moreover, it has been pointed out that, in some situations involving high ratios of the cross-section between two neighbouring cells, the well-balanced schemes may fail at providing approximations, whatever the mesh size is. This is an important remark, since one expects to get approximations that will converge uniformly towards the true solution when some sudden closure of the duct occurs. Actually, the present one-dimensional Finite Volume approach enables to achieve this requirement in a continuous way, without introducing any difficulty.

Another consequence of the present work is that some new approach may be considered in order to define a meaningful and direct approach for the tricky problem of the homogenisation of obstacles in industrial components arising in nuclear power plants ([22]). This work is currently under way ([2]). Eventually, we would like to emphasize that, as mentionned in the introduction, some counterpart of the classical well-balanced formulation, which takes advantage of the present results, is also currently investigated. We expect that this work will help improving the classical well-balanced strategy.

Acknowledgements Xavier Martin benefits from financial support through an EDF-CIFRE contract 2012/0838. This work has been achieved within the framework of the TITANS2 project. All computational facilities were provided by EDF. Authors also thank Erwan Lecoupanec and Thomas Pasutto for their help with Code.Saturne.

References

1. Audebert, B. and Blondel, F. and Pasutto, T. and Stanciu, M., Condensation models and boundary conditions for non-equilibrium wet steam flows, *International Journal on Finite Volumes*, <http://www.latp.univ-mrs.fr/IJFV/>, pp.1-52, vol.10, 2013.
2. Audebert, B. and Hérard, J.-M. and Martin, X. and Ouardia, T., Une formulation pour la prise en compte des obstacles en milieu encombré, *internal EDF report*, 2014.
3. Baer, M. R. and Nunziato, J. W., A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials., *International journal of multi-phase flow*, pp.861-889, vol.12, 1986.
4. Buffard, T. and Gallouët, T. and Hérard, J.-M., A sequel to a rough Godunov scheme: application to real gases., *Computers & Fluids*, pp.813-847, vol.29, 2000.
5. Clain, S. and Rochette, D., First and second-order Finite Volume methods for the one-dimensional non-conservative Euler system, *Journal of Computational Physics*, pp.8214-8248, vol.228, 2009.
6. Coquel, F. and Gallouët, T. and Hérard, J. M. and Seguin, N., Closure laws for a two-fluid two-pressure model , *Comptes Rendus Mathématique*, pp.927-932, vol.334, 2002.
7. Coquel, F. and Saleh, K. and Seguin, N., A robust and entropy-satisfying numerical scheme for fluid flows in discontinuous nozzles, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, pp.2043-2083, vol.24, 2014.
8. Faucher, E. and Hérard, J.-M. and Barret, M. and Toulemonde, C. , Computation of flashing flows in variable cross-section ducts, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, pp. 365-391, vol.13, 2000.
9. Galié, T., Couplage interfacial de modèles en dynamique des fluides. Application aux écoulements diphasiques , *PhD thesis, Universit Pierre et Marie Curie-Paris VI*, 2009.
10. Gallouët, T. and Hérard, J.-M. and Seguin, N., On the use of symetrizing variables for vacuums., *Calcolo*, pp.163-194, vol.40, 2003.
11. Girault, L. and Hérard, J.-M., A two-fluid hyperbolic model in a porous medium., *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, pp.1319-1348, vol.44, 2010.
12. Girault, L. and Hérard, J.-M. , Multidimensional computations of a two-fluid hyperbolic model in a porous medium., *International Journal on Finite Volumes*, <http://www.latp.univ-mrs.fr/IJFV/>, pp.1-33, vol.7, 2010.
13. Goatin, P. and LeFloch, P. G., The Riemann problem for a class of resonant hyperbolic systems of balance laws, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, pp.881-902, vol.21, 2004.
14. Gosse, L., A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, pp.339-365, vol.11, 2001.
15. Gosse, L. and Leroux, A. Y., Un schéma-équilibre adapté aux lois de conservation scalaires non-homogènes, *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Srie I, Mathématique*, pp.543-546, vol.323, 1996.
16. Greenberg, J.-M. and Leroux, A.-Y., A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations., *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1996, pp.1-16, vol.33.
17. Helluy, P. and Hérard, J.-M. and Mathis, H., A well-balanced approximate Riemann solver for compressible flows in variable cross-section ducts., *Journal of Computational and Applied Mathematics*, pp.1976-1992, vol.236, 2012.
18. Hérard, J.-M. , A rough scheme to couple free and porous media, *International Journal on Finite Volumes*, <http://www.latp.univ-mrs.fr/IJFV/>, pp.1-28, 3, 2006.
19. Idel'Chik, I. E., Memento des pertes de charge, *Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Paris: Eyrolles*, 1969.
20. Kröner, D. and LeFloch, P. and Thanh, M. D. , The minimum entropy principle for compressible fluid flows in a nozzle with discontinuous cross-section., *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, pp.425-443, vol.42, 2008.

21. Kröner, D. and Thanh, M. D. , Numerical solutions to compressible flows in a nozzle with variable cross-section., *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2006, pp.796-824, vol.43.
22. Le Coq, G. and Aubry, S. and Cahouet, J. and Lequesne, P. and Nicolas, G. and Pastorini, S. , The THYC computer code. A finite volume approach for 3 dimensional two-phase flows in tube bundles, *Bulletin de la Direction des études et recherches-Electricité de France. Série A, nucléaire, hydraulique, thermique. In french*, pp.61–76, 1989.
23. Martin, X. , Numerical modeling of flows in obstructed media , *PhD thesis, Université Aix Marseille*, in preparation.
24. Rochette, D. and Clain, S. and Buffard, T. , Numerical scheme to complete a compressible gas flow in variable porosity media, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, pp. 299-309, vol.19,2005.

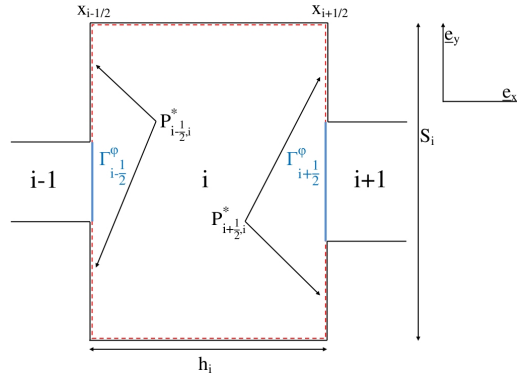


Fig. 1 Finite volume Ω_i with neighbouring cells, fluid interfaces and inner wall-boundaries.

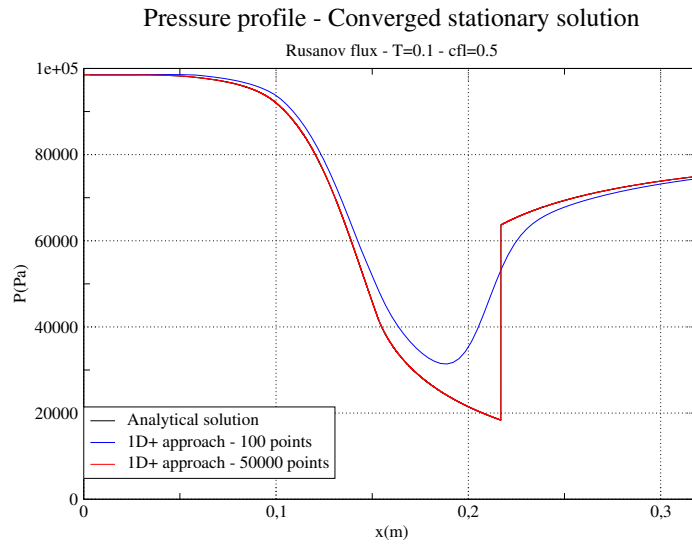


Fig. 2 Steady flow in Laval nozzle: pressure profile obtained with Rusanov scheme and 100 or 50000 cells.

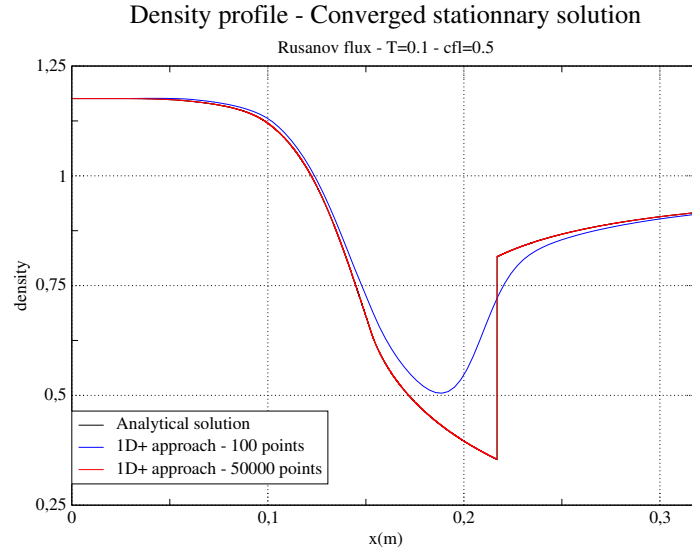


Fig. 3 Steady flow in Laval nozzle: density profile obtained with Rusanov scheme and 100 or 50000 cells.

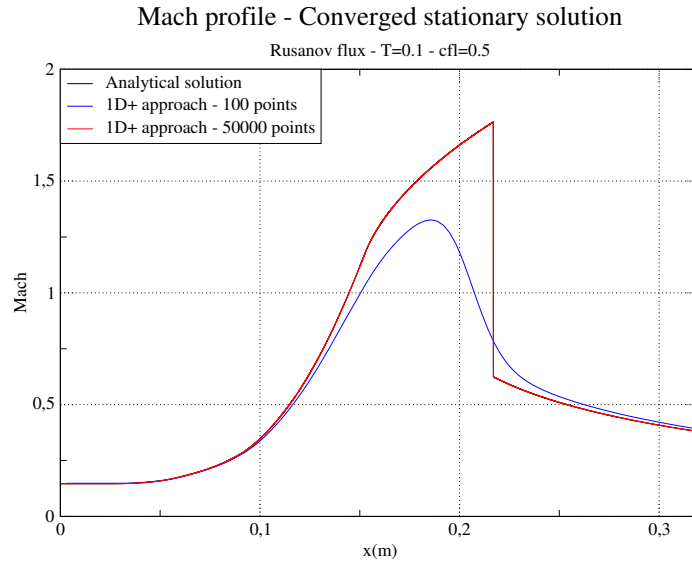


Fig. 4 Steady flow in Laval nozzle: Mach number profile obtained with Rusanov scheme and 100 or 50000 cells.

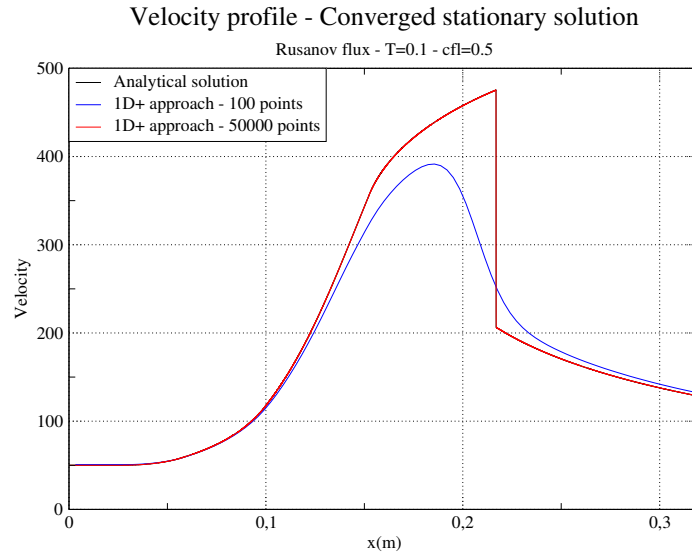


Fig. 5 Steady flow in Laval nozzle: velocity profile obtained with Rusanov scheme and 100 or 50000 cells.

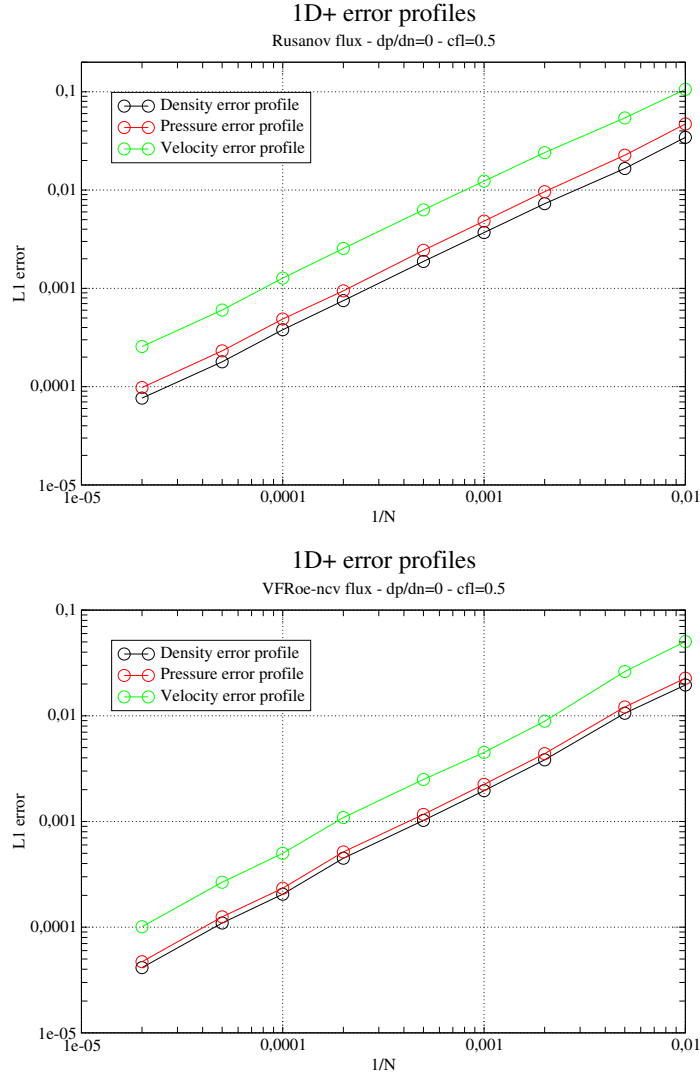


Fig. 6 Steady flow in Laval nozzle: L^1 norm of the error when using Rusanov and $VFRoe_{nv}$ schemes. Coarser and finer meshes include 100 or 50000 cells.



Fig. 7 Experimental setup : 1D pipe with a sudden contraction and position of the initial membrane.

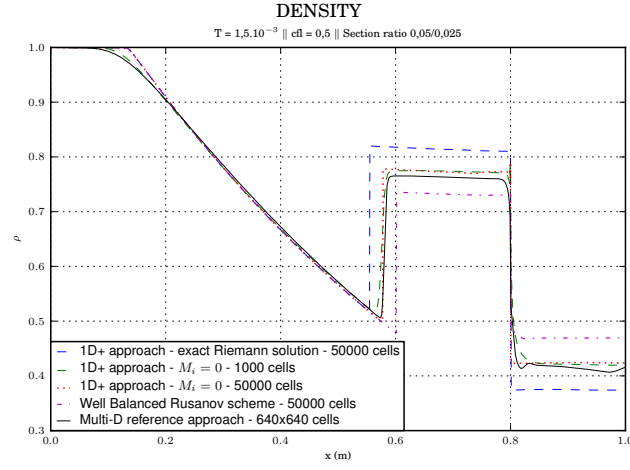


Fig. 8 Density profiles at $t = T_0$ in test case 1. Dashed blue curve: integral approach with 50000 cells, using the exact Riemann estimate of the wall pressure. Dotted red and dashed green curves: integral approach with 50000 and 1000 cells respectively, assuming $M_i = 0$ in wall pressures. Dotted-dashed magenta curve: well-balanced Rusanov scheme with 50000 cells. Black curve: y -averaging of 2D results.

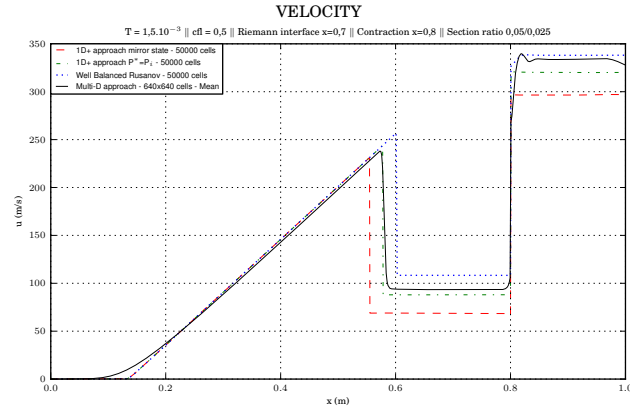


Fig. 9 Velocity profiles at $t = T_0$ in test case 1. Dashed red curve: integral approach with 50000 cells, using the exact Riemann estimate of the wall pressure. Dotted-dashed green curves: integral approach with 50000 cells, assuming $M_i = 0$ in the wall pressure estimate. Dotted blue curve: well-balanced Rusanov scheme with 50000 cells. Black curve: y -averaging of 2D results.

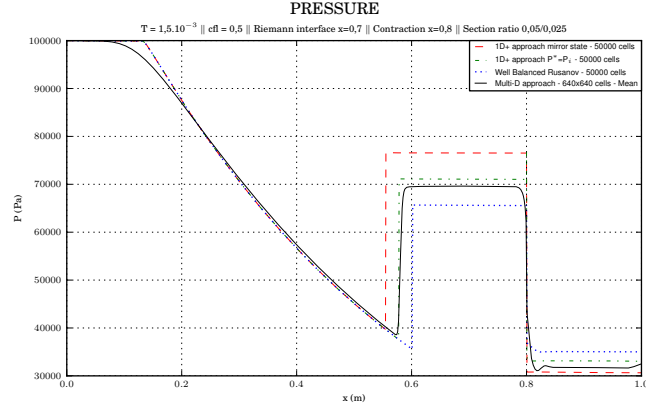


Fig. 10 Pressure profiles at $t = T_0$ in test case 1. Dashed red curve: integral approach with 50000 cells, using the exact Riemann estimate of the wall pressure. Dotted-dashed green curves: integral approach with 50000 cells, assuming $M_i = 0$ in the wall pressure estimate. Dotted blue curve: well-balanced Rusanov scheme with 50000 cells. Black curve: y -averaging of 2D results.

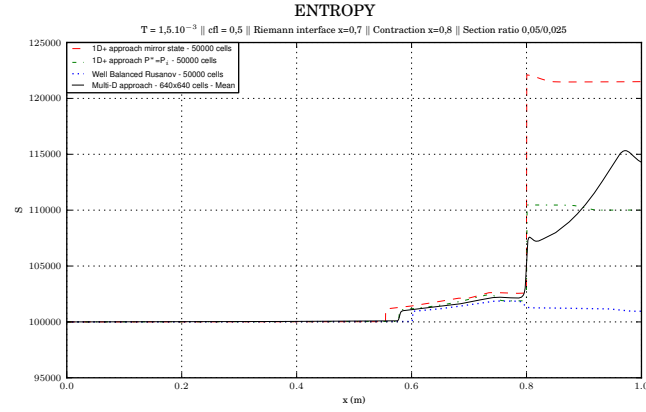


Fig. 11 Entropy profiles at $t = T_0$ in test case 1. Dashed red curve: integral approach with 50000 cells, using the exact Riemann estimate of the wall pressure. Dotted-dashed green curves: integral approach with 50000 cells, assuming $M_i = 0$ in the wall pressure estimate. Dotted blue curve: well-balanced Rusanov scheme with 50000 cells. Black curve: y -averaging of 2D results.

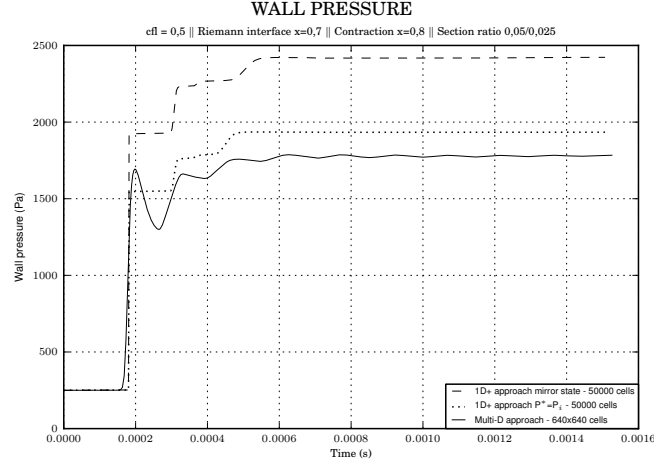


Fig. 12 Comparison of wall pressures in test case 1. Dashed curve: integral approach using the exact Riemann estimate of the wall pressure. Dotted curve: integral approach setting $M_i = 0$. Full black curve: multidimensional computation using 640^2 cells.

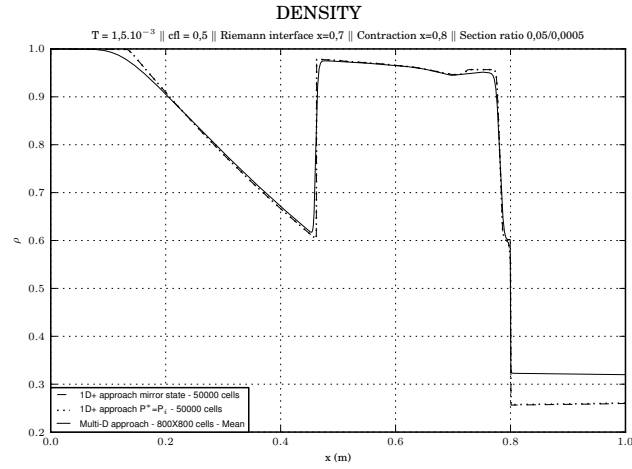


Fig. 13 Density profiles at $t = T_0$ in test case 2. Dashed curve: integral approach using the exact Riemann estimate of the wall pressure. Dotted curve: integral approach assuming $M_i = 0$ in wall pressure estimations. Black curve: y -averaging of two-dimensional results.

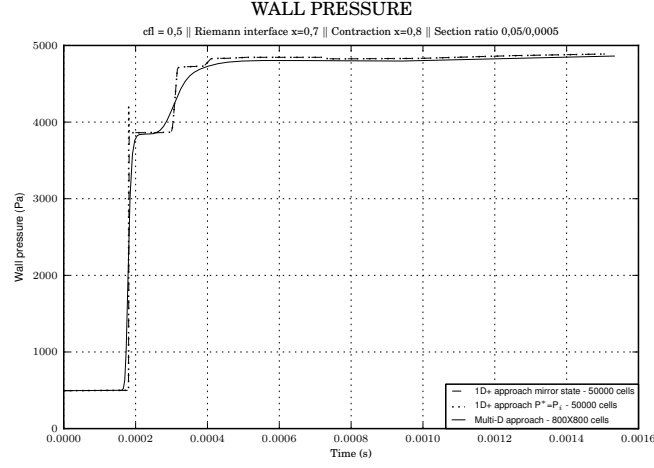


Fig. 14 Comparison of wall pressures in test case 2. Dashed curve: integral approach using the exact Riemann estimate of the wall pressure. Dotted curve: integral approach setting $M_i = 0$. Full black curve: multidimensional computation using 800^2 cells.

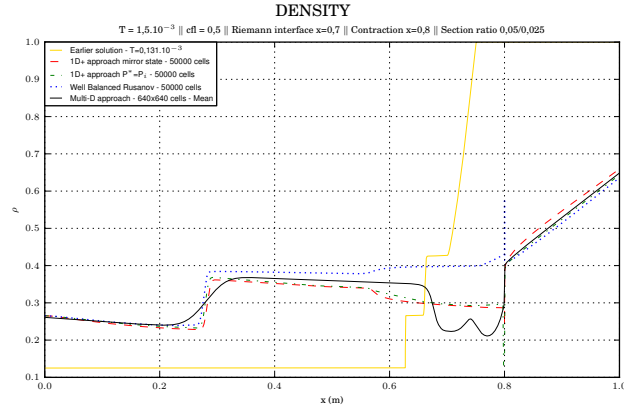


Fig. 15 Density profiles at $t = T_0$ in test case 3. Dashed curve: integral approach using the exact Riemann estimate of the wall pressure. Dotted curve: integral approach assuming $M_i = 0$ in wall pressure estimations. Black curve: y -averaging of two-dimensional results.

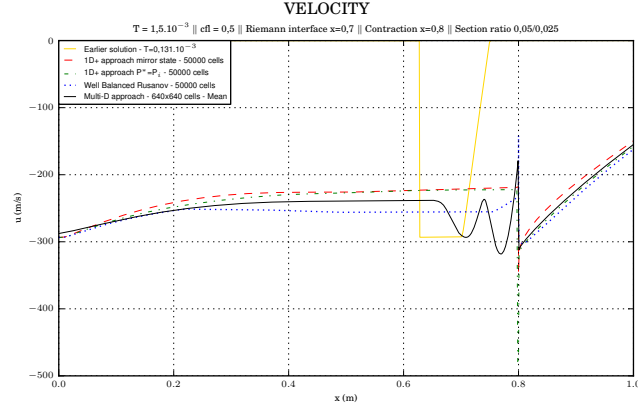


Fig. 16 Velocity profiles at $t = T_0$ in test case 3. Dashed curve: integral approach using the exact Riemann estimate of the wall pressure. Dotted curve: integral approach assuming $M_i = 0$ in wall pressure estimations. Black curve: y -averaging of two-dimensional results.

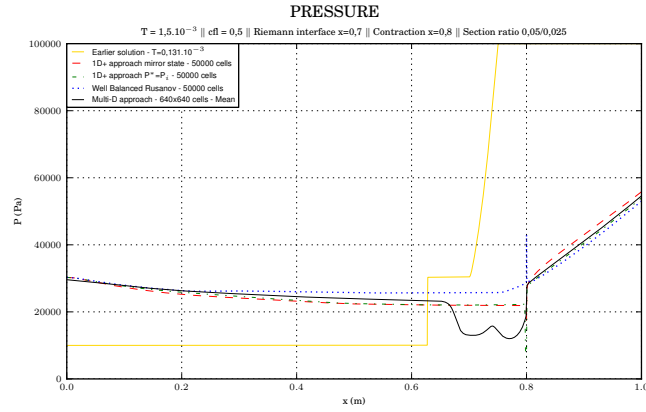


Fig. 17 Pressure profiles at $t = T_0$ in test case 3. Dashed curve: integral approach using the exact Riemann estimate of the wall pressure. Dotted curve: integral approach assuming $M_i = 0$ in wall pressure estimations. Black curve: y -averaging of two-dimensional results.

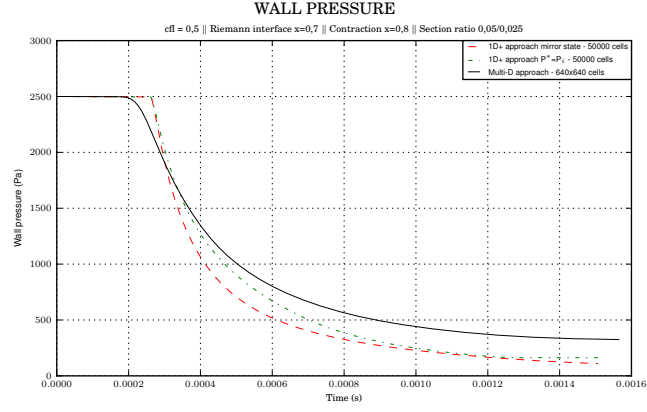


Fig. 18 Comparison of wall pressures in test case 3. Dashed curve: integral approach using the exact Riemann estimate of the wall pressure. Dotted curve: integral approach setting $M_i = 0$. Full black curve: multidimensional computation using 800^2 cells.

Présentation des résultats des 16 cas test instationnaires

On présente ici les résultats des 16 cas test instationnaires évoqués dans le chapitre 1. Les 16 cas test sont répartis sur 2 domaines tubulaires à section variable : le premier avec une contraction à droite du domaine, le seconde avec une contraction à gauche (voir FIGURE A.1 et FIGURE A.2). Le changement de hauteur de section est toujours situé à $x = 0.8$.

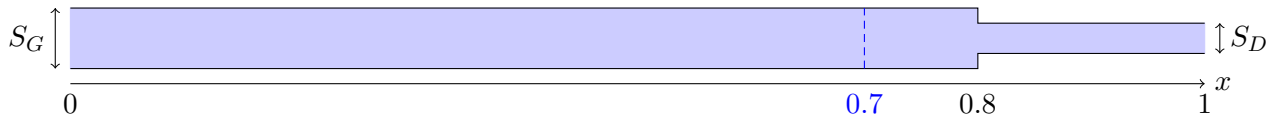


FIGURE A.1: Représentation d'un tube contracté à droite.

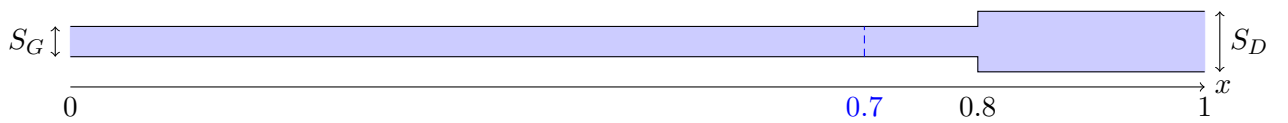


FIGURE A.2: Représentation d'une tube contracté à gauche.

Qu'elle soit à gauche ou droite, on a testé 4 hauteurs de section contractée (la section non contractée étant toujours égale à 1), ce qui revient finalement à 8 configurations différentes, résumées dans le tableau TABLE A.1.

Enfin, on considère une membrane à $x = 0.7$, soit avant le saut de section, avec une condition initiale à gauche et une condition initiale à droite de cette membrane. Sur

chaque domaine, on réalise 2 fois l'expérience du tube à choc de Sod, en imposant puis en inversant les conditions initiales de sorte à générer, dans un premier cas une onde de choc, puis, dans un second cas, une onde de détente en direction du saut de section.

Les 16 cas sont répertoriés dans le tableau récapitulatif suivant :

	S_G	S_D	$\underline{W}_G^0 (x < 0.7)$			$\underline{W}_D^0 (x > 0.7)$		
	$x < 0.8$	$x > 0.8$	ρ	u	P	ρ	u	P
cas 1	1	0.5	1	0	10^5	0.125	0	10^4
cas 2	1	0.01	1	0	10^5	0.125	0	10^4
cas 3	1	0.5	0.125	0	10^4	1	0	10^5
cas 4	1	0.01	0.125	0	10^4	1	0	10^5
cas 5	0.5	1	1	0	10^5	0.125	0	10^4
cas 6	0.01	1	1	0	10^5	0.125	0	10^4
cas 7	0.5	1	0.125	0	10^4	1	0	10^5
cas 8	0.01	1	0.125	0	10^4	1	0	10^5
cas 9	1	0.1	1	0	10^5	0.125	0	10^4
cas 10	1	0.9	1	0	10^5	0.125	0	10^4
cas 11	1	0.1	0.125	0	10^4	1	0	10^5
cas 12	1	0.9	0.125	0	10^4	1	0	10^5
cas 13	0.1	1	1	0	10^5	0.125	0	10^4
cas 14	0.9	1	1	0	10^5	0.125	0	10^4
cas 15	0.1	1	0.125	0	10^4	1	0	10^5
cas 16	0.9	1	0.125	0	10^4	1	0	10^5

TABLE A.1

Dans tous les cas, la convergence en maillage a été étudiée.

A.1 Cas test 1 : onde de choc à droite, contraction à droite, $S_G/S_D = 1/0.5$.

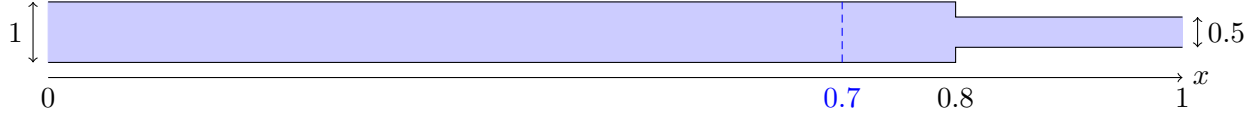


FIGURE A.3: Représentation d'un tube contracté à droite.

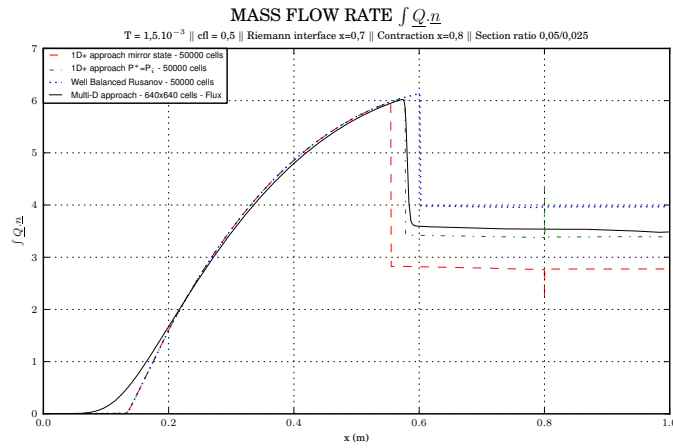


FIGURE A.4: Résultats cas 1 - Mass flow rate

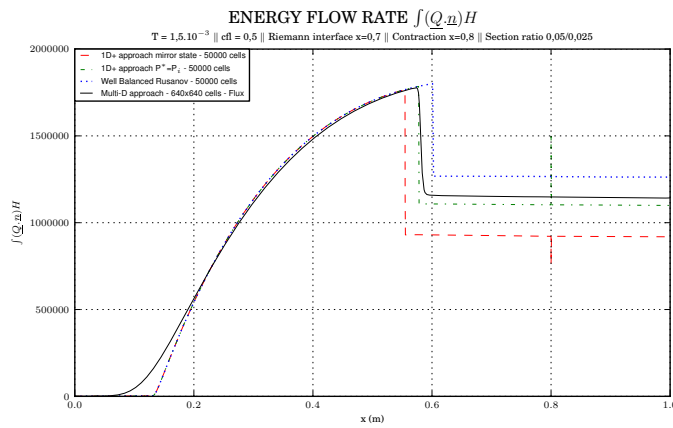


FIGURE A.5: Résultats cas 1 - Energy flow rate

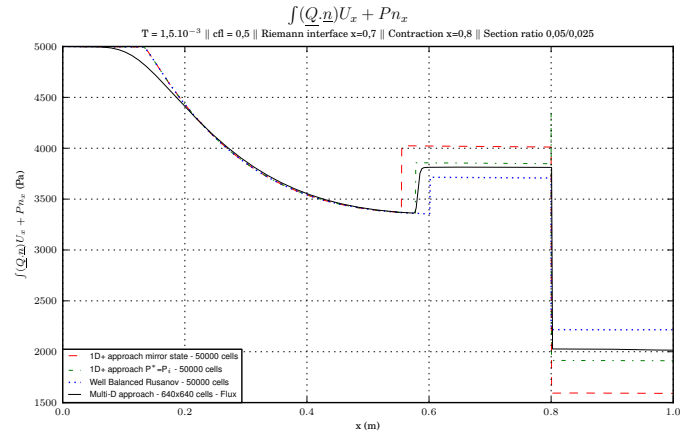
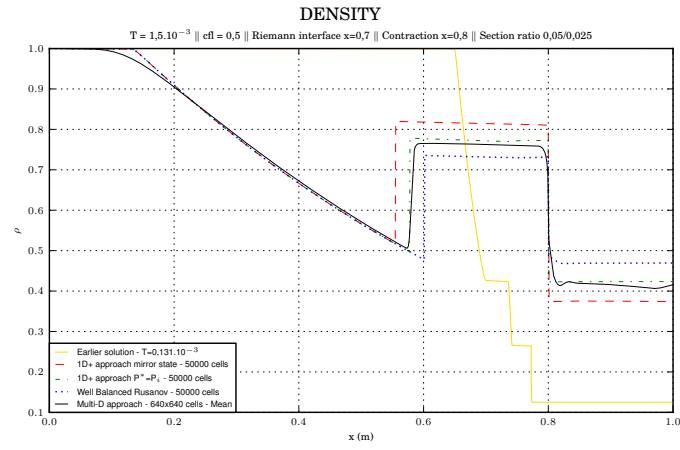
FIGURE A.6: Résultats cas 1 - Débit ux 

FIGURE A.7: Résultats cas 1 - Density

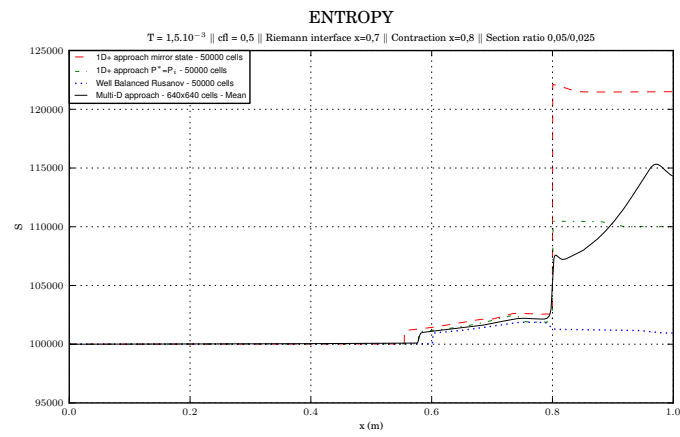


FIGURE A.8: Résultats cas 1 - Entropy

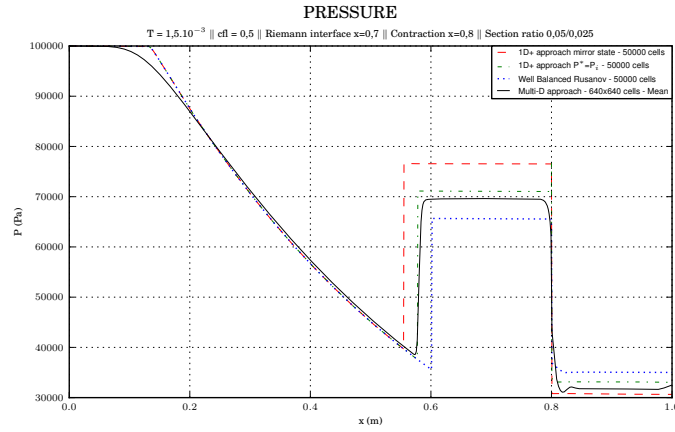


FIGURE A.9: Résultats cas 1 - Pressure

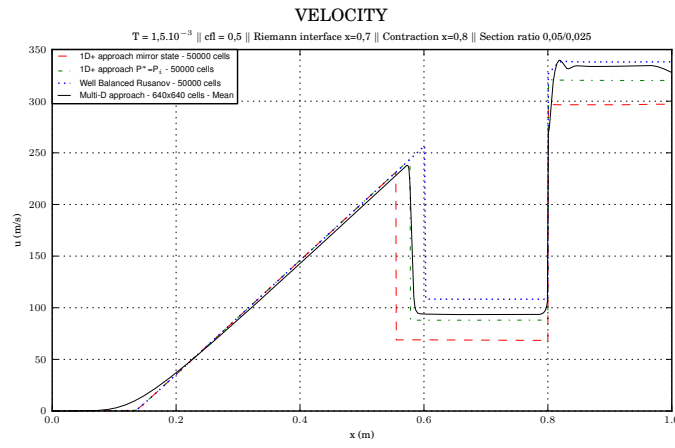


FIGURE A.10: Résultats cas 1 - Velocity

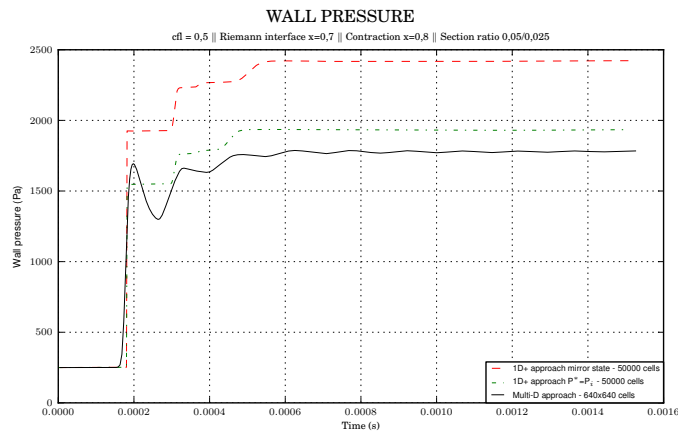


FIGURE A.11: Résultats cas 1 - Wall pressure

A.2 Cas test 2 : onde de choc à droite, contraction à droite, $S_G/S_D = 1/0.01$.

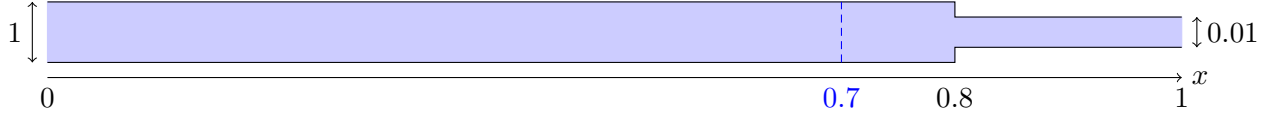


FIGURE A.12: Représentation d'un tube contracté à droite.

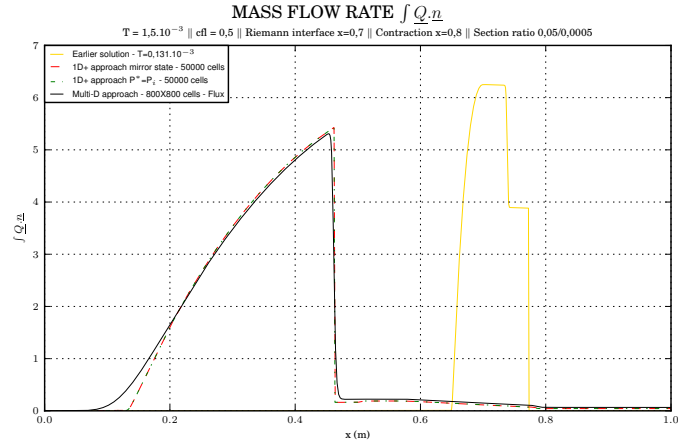


FIGURE A.13: Résultats cas 2 - Mass flow rate

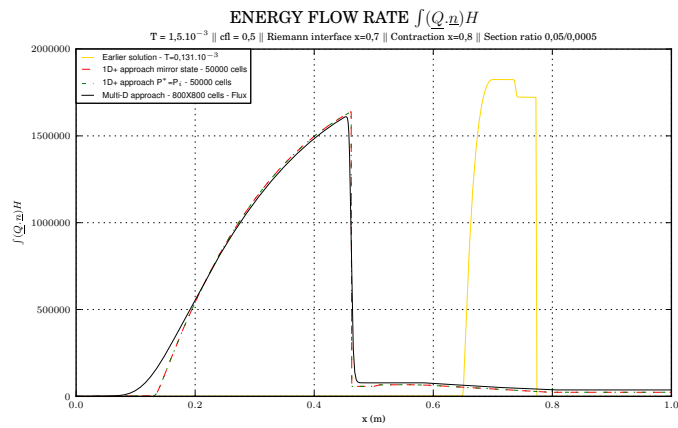


FIGURE A.14: Résultats cas 2 - Energy flow rate

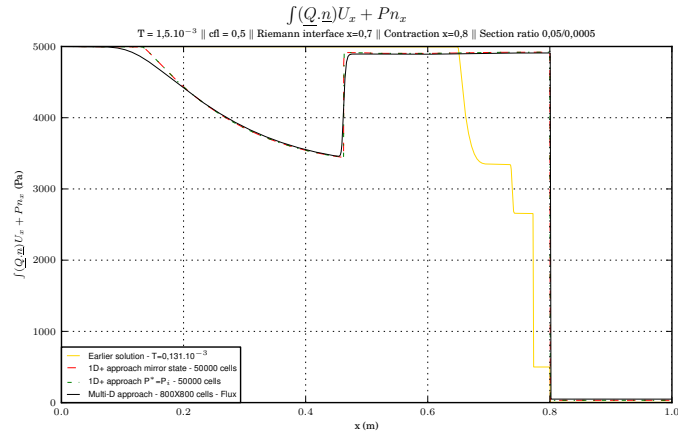
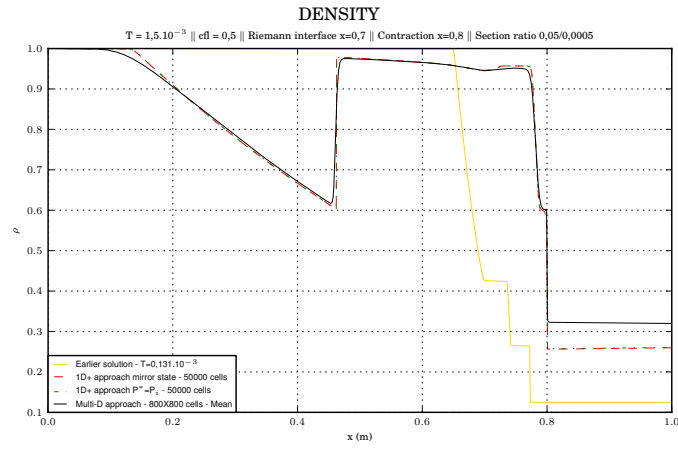
FIGURE A.15: Résultats cas 2 - Débit ux 

FIGURE A.16: Résultats cas 2 - Density

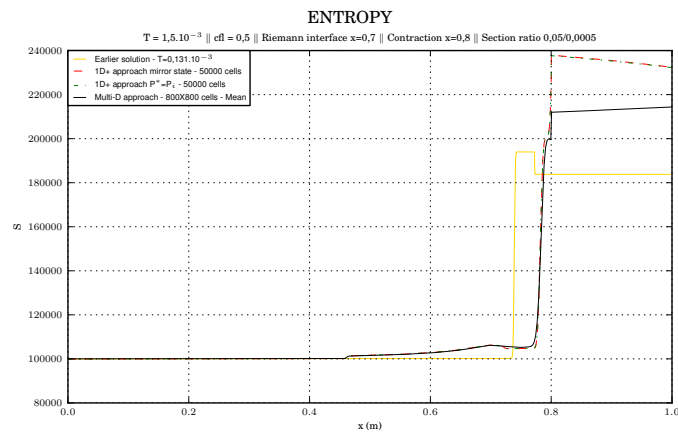


FIGURE A.17: Résultats cas 2 - Entropy

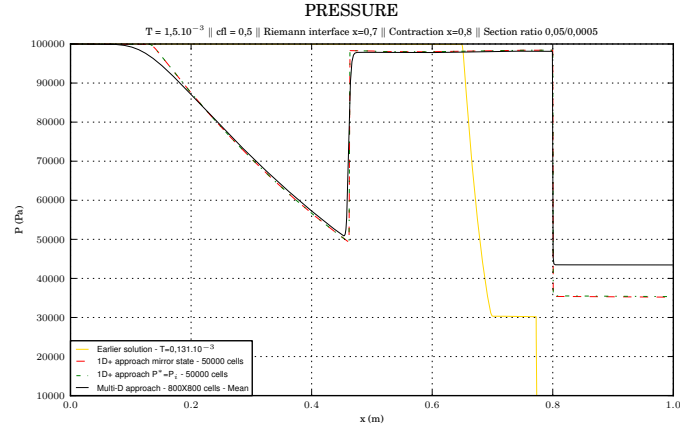


FIGURE A.18: Résultats cas 2 - Pressure

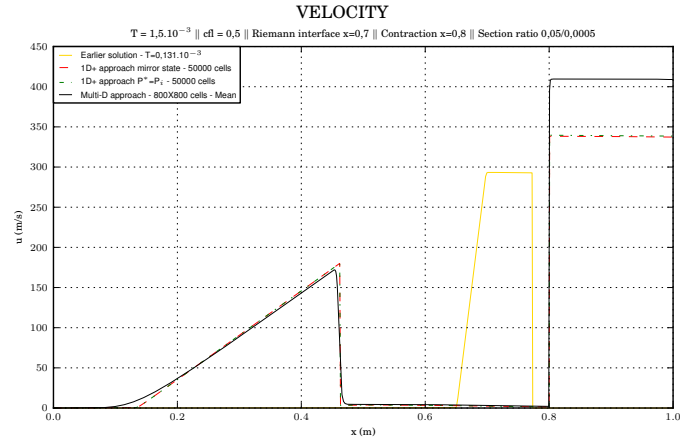


FIGURE A.19: Résultats cas 2 - Velocity

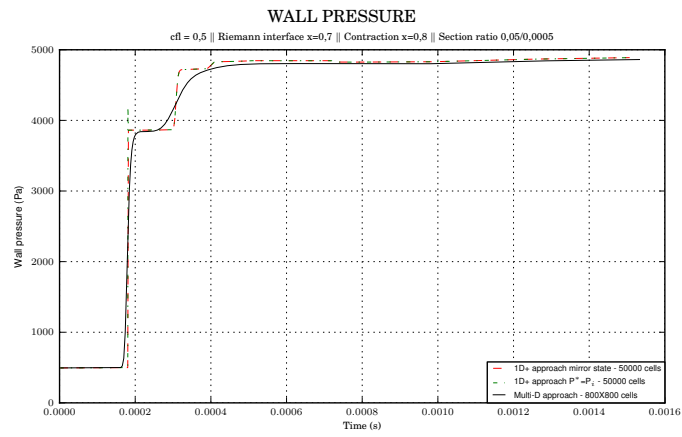


FIGURE A.20: Résultats cas 2 - Wall pressure

A.3 Cas test 3 : onde de détente à droite, contraction à droite, $S_G/S_D = 1/0.5$.

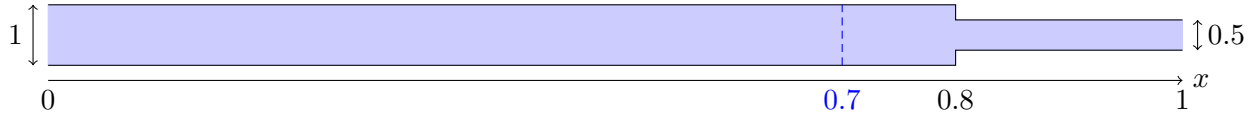


FIGURE A.21: Représentation d'un tube contracté à droite.

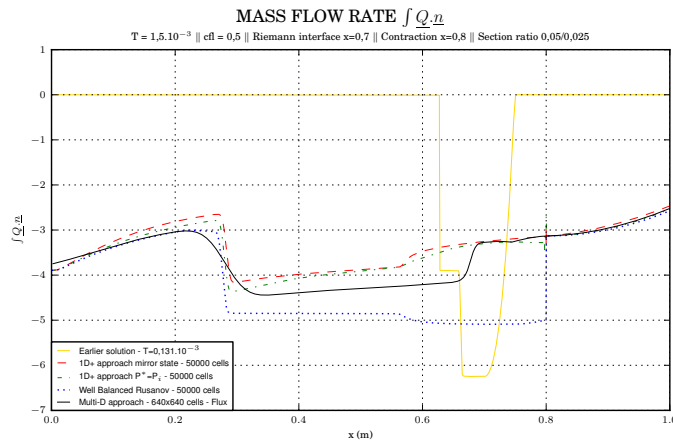


FIGURE A.22: Résultats cas 3 - Mass flow rate

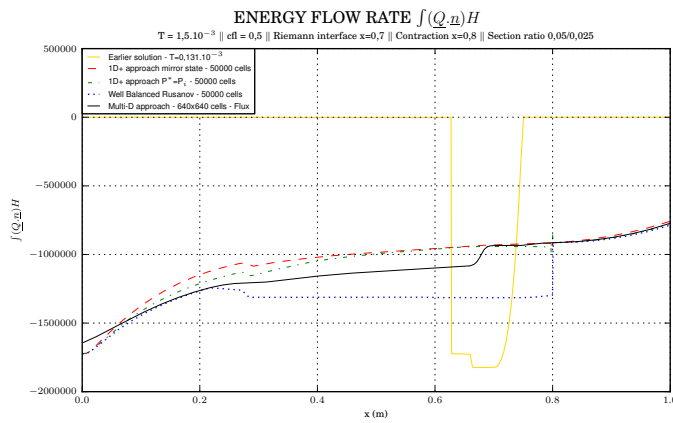


FIGURE A.23: Résultats cas 3 - Energy flow rate

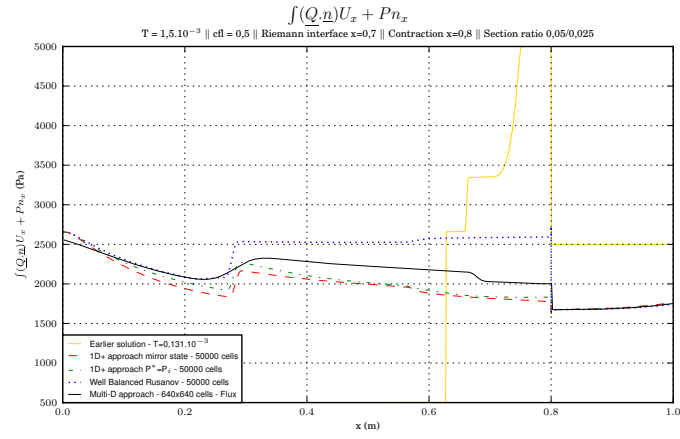
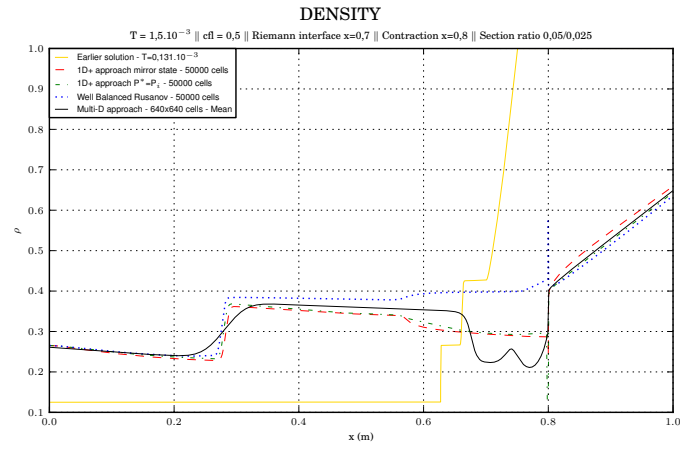
FIGURE A.24: Résultats cas 3 - Débit ux 

FIGURE A.25: Résultats cas 3 - Density

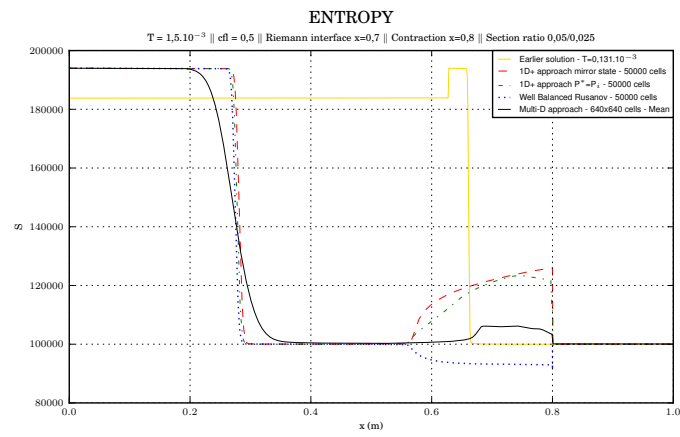


FIGURE A.26: Résultats cas 3 - Entropy

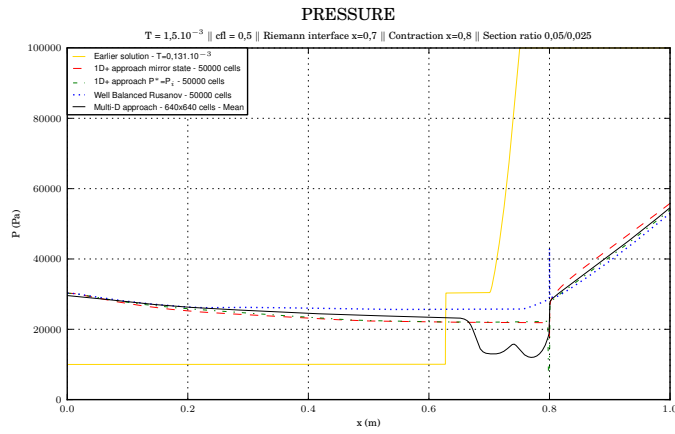


FIGURE A.27: Résultats cas 3 - Pressure

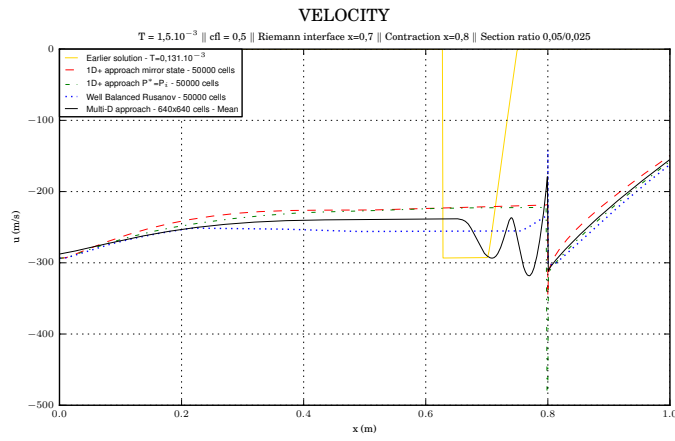


FIGURE A.28: Résultats cas 3 - Velocity

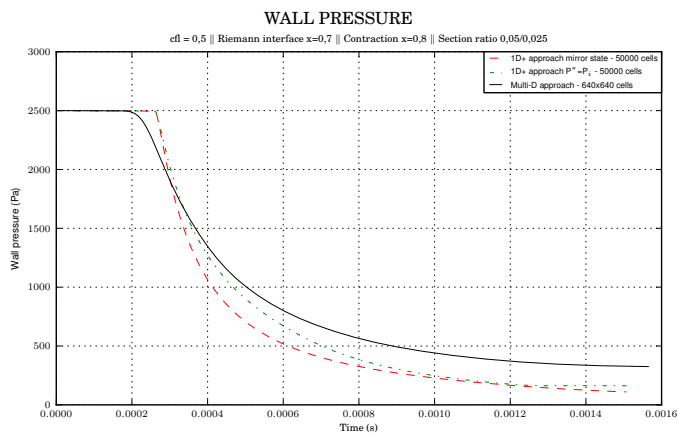


FIGURE A.29: Résultats cas 3 - Wall pressure

A.4 Cas test 4 : onde de détente à droite, contraction à droite, $S_G/S_D = 1/0.01$.

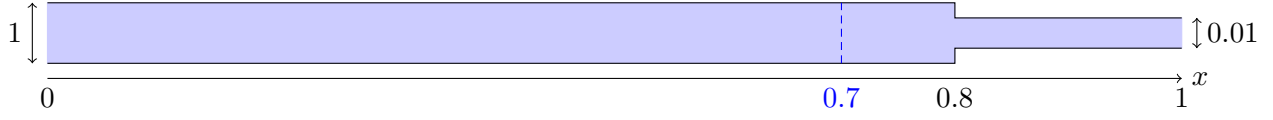


FIGURE A.30: Représentation d'un tube contracté à droite.

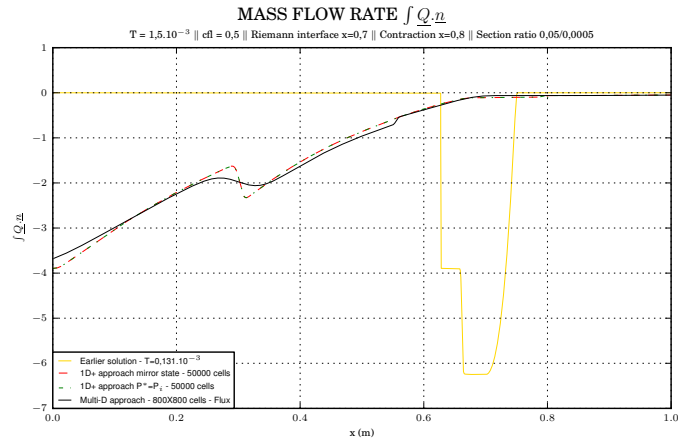


FIGURE A.31: Résultats cas 4 - Mass flow rate

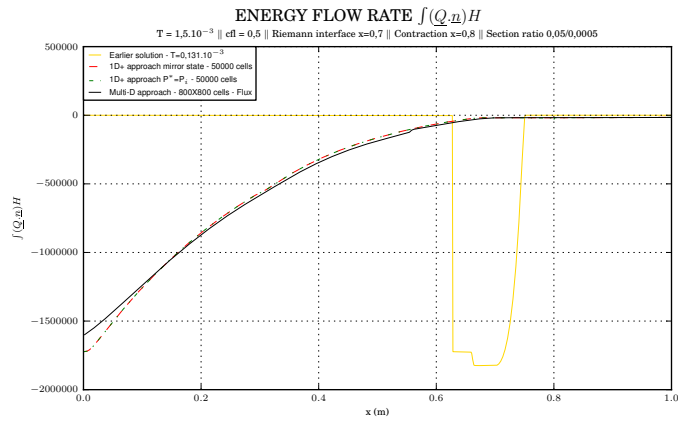


FIGURE A.32: Résultats cas 4 - Energy flow rate

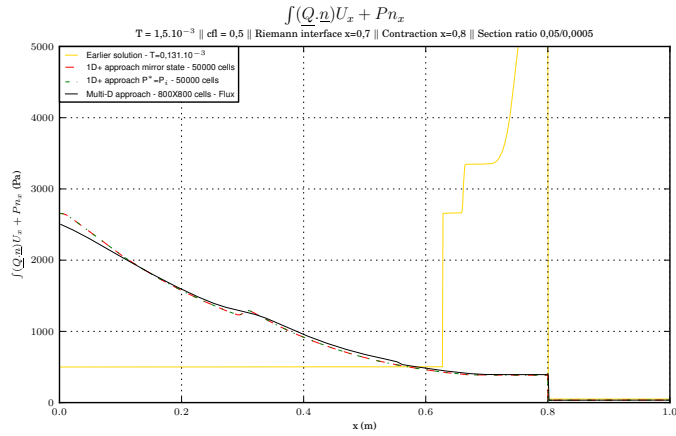
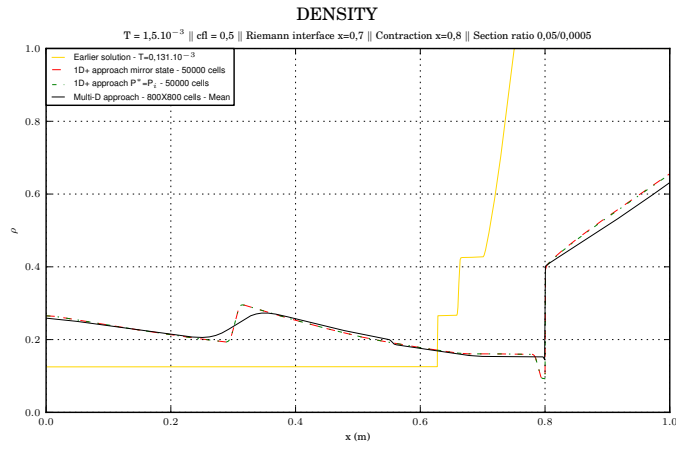
FIGURE A.33: Résultats cas 4 - Débit ux 

FIGURE A.34: Résultats cas 4 - Density

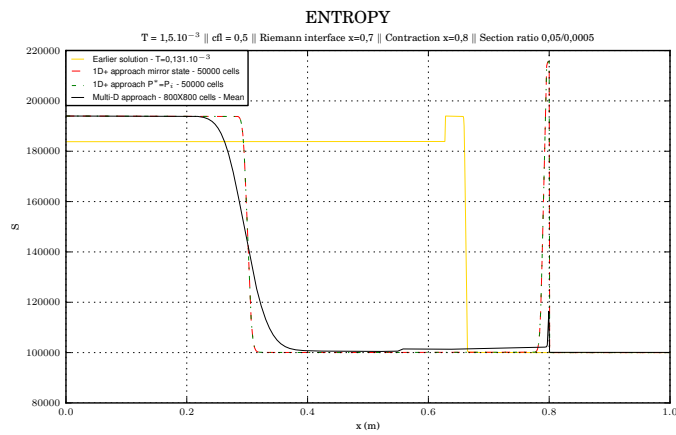


FIGURE A.35: Résultats cas 4 - Entropy

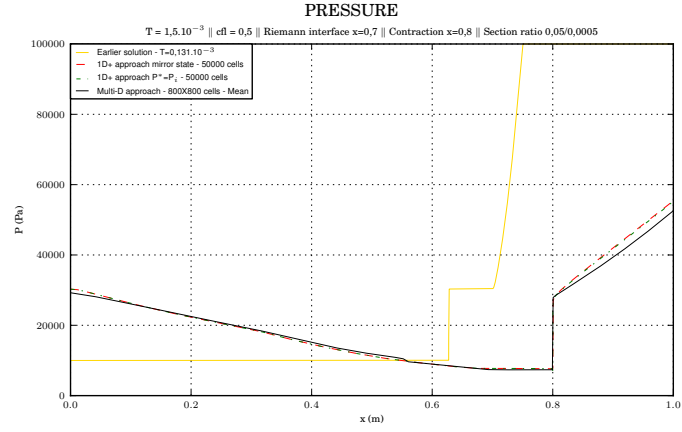


FIGURE A.36: Résultats cas 4 - Pressure

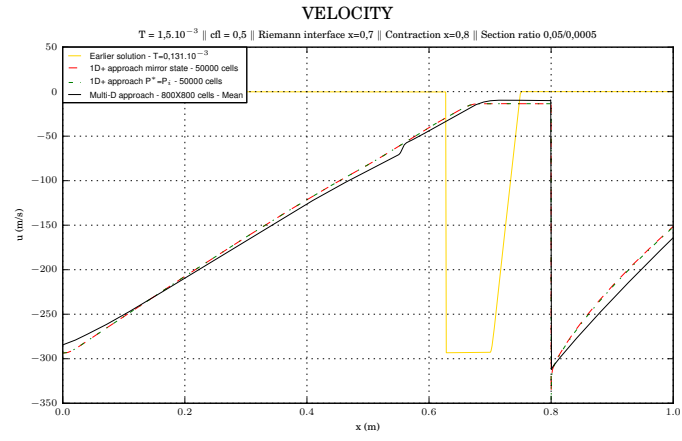


FIGURE A.37: Résultats cas 4 - Velocity

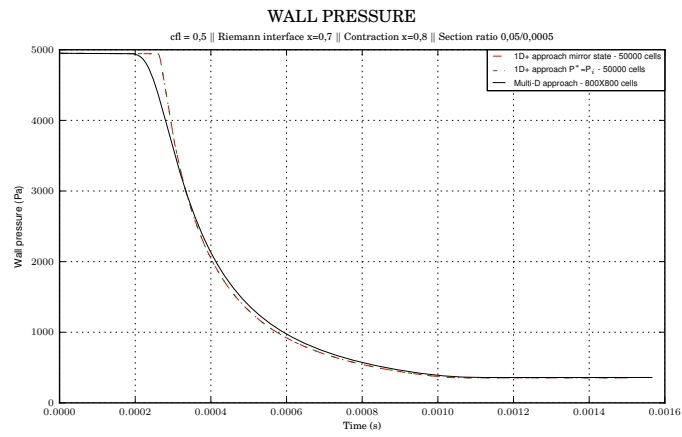


FIGURE A.38: Résultats cas 4 - Wall pressure

A.5 Cas test 5 : onde de choc à droite, contraction à gauche, $S_G/S_D = 0.5/1$.

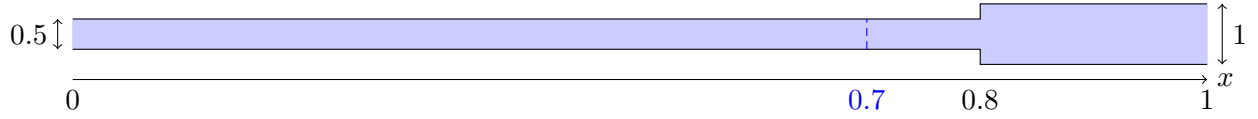


FIGURE A.39: Représentation d'une tube contracté à gauche.

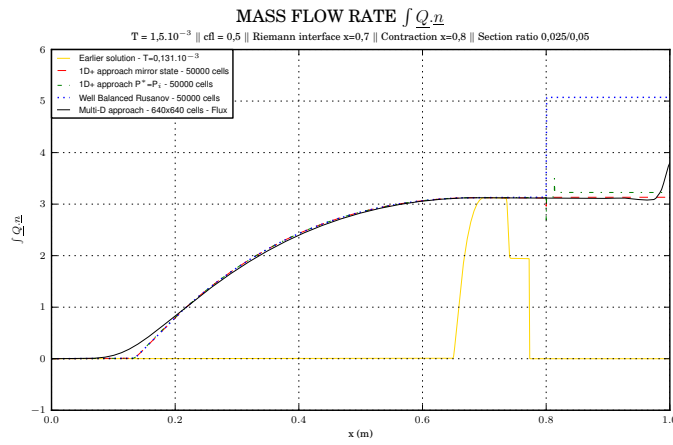


FIGURE A.40: Résultats cas 5 - Mass flow rate

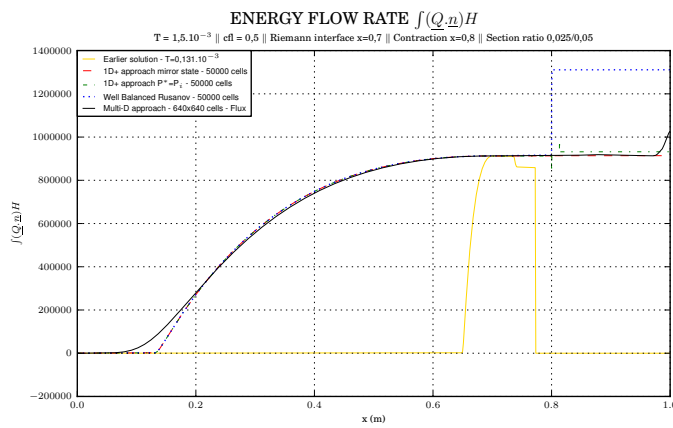


FIGURE A.41: Résultats cas 5 - Energy flow rate

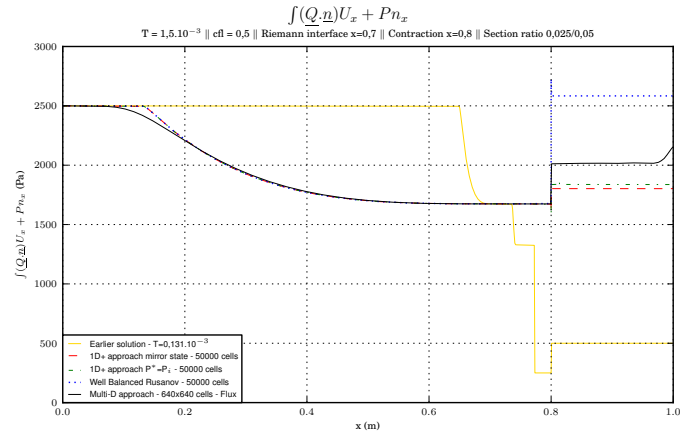
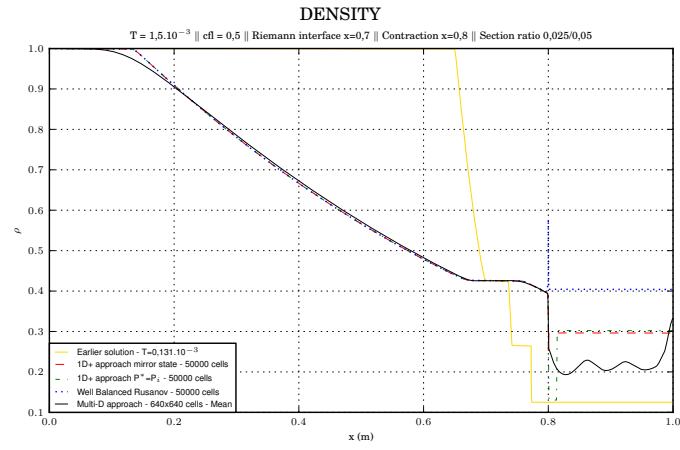
FIGURE A.42: Résultats cas 5 - Débit ux 

FIGURE A.43: Résultats cas 5 - Density

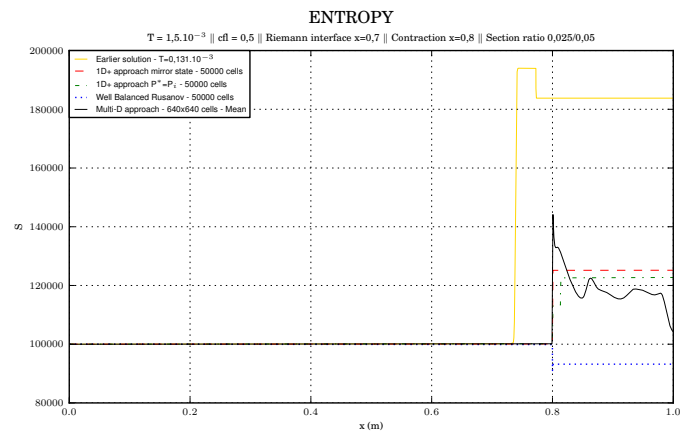


FIGURE A.44: Résultats cas 5 - Entropy

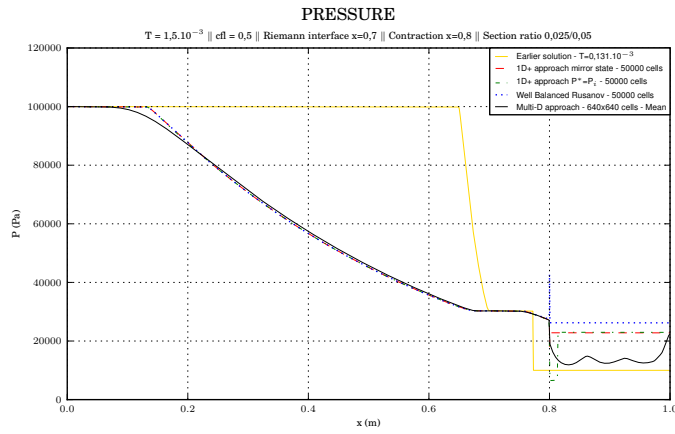


FIGURE A.45: Résultats cas 5 - Pressure

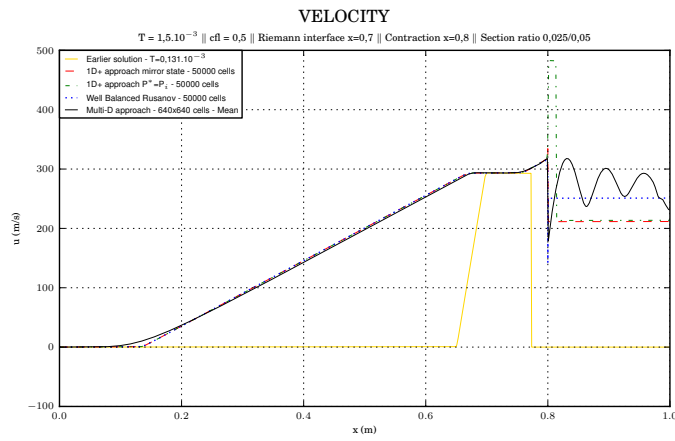


FIGURE A.46: Résultats cas 5 - Velocity

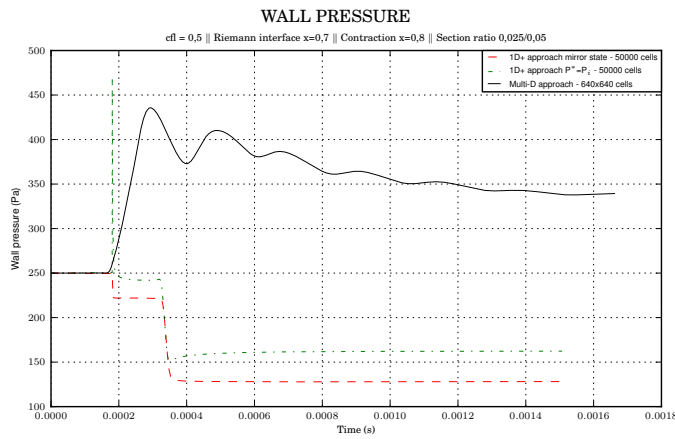


FIGURE A.47: Résultats cas 5 - Wall pressure

A.6 Cas test 6 : onde de choc à droite, contraction à gauche, $S_G/S_D = 0.01/1$.

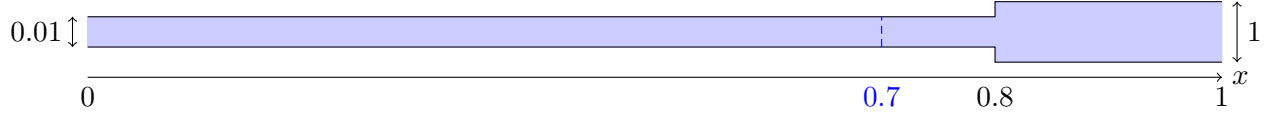


FIGURE A.48: Représentation d'une tube contracté à gauche.

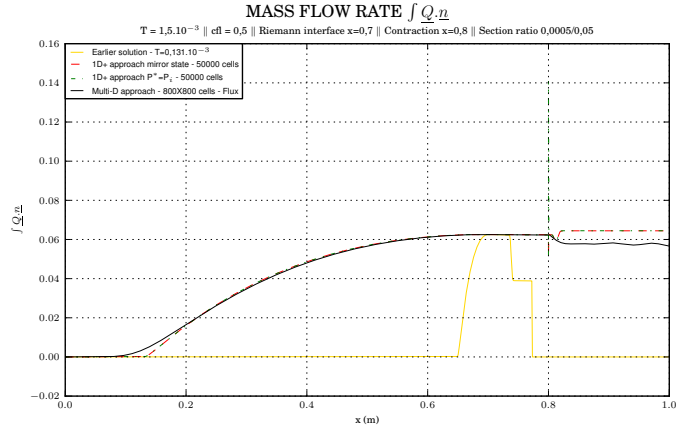


FIGURE A.49: Résultats cas 6 - Mass flow rate

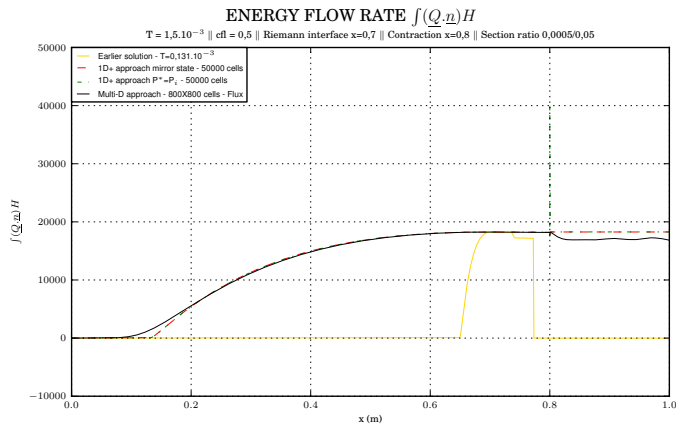


FIGURE A.50: Résultats cas 6 - Energy flow rate

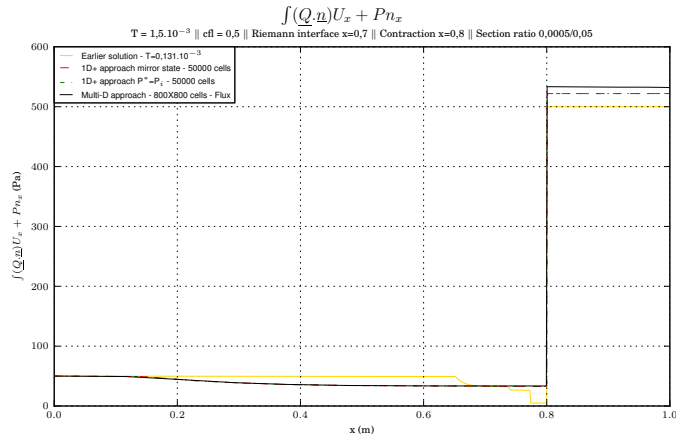
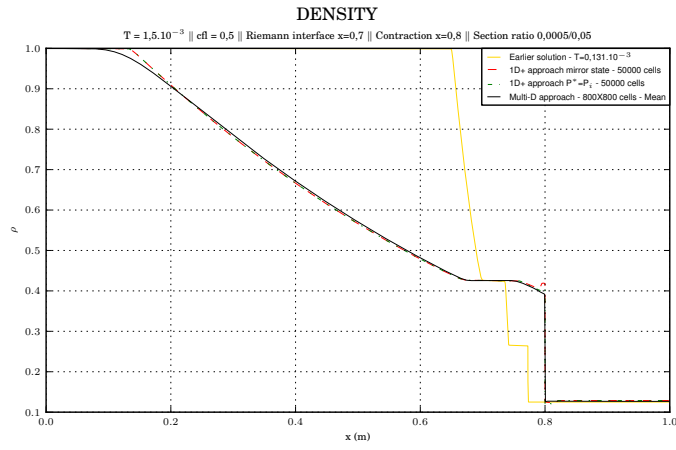
FIGURE A.51: Résultats cas 6 - Débit u_x 

FIGURE A.52: Résultats cas 6 - Density

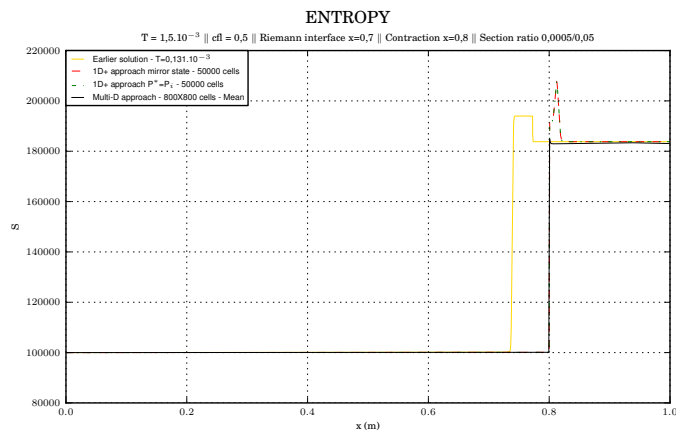


FIGURE A.53: Résultats cas 6 - Entropy

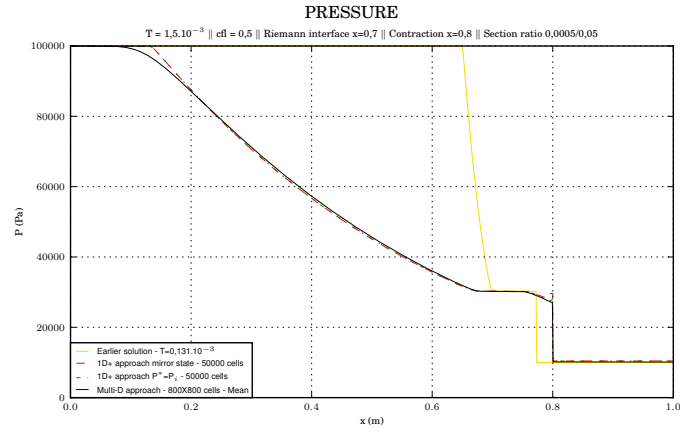


FIGURE A.54: Résultats cas 6 - Pressure

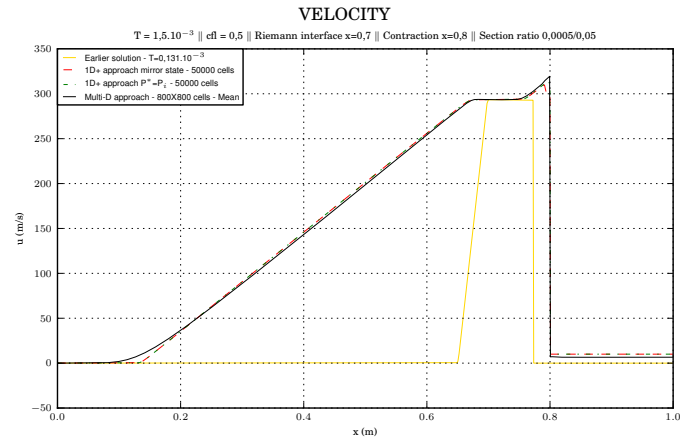


FIGURE A.55: Résultats cas 6 - Velocity

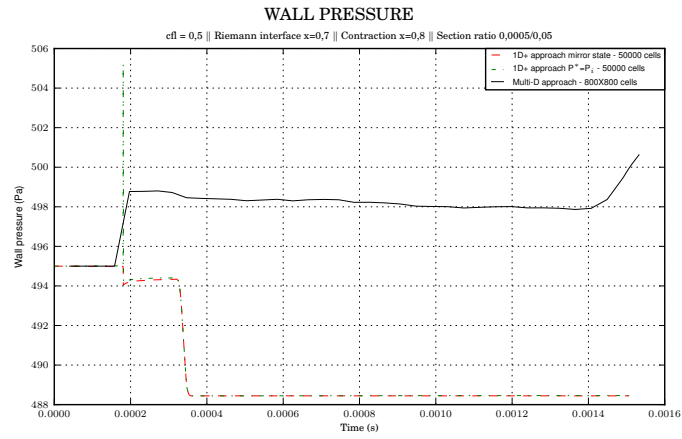


FIGURE A.56: Résultats cas 6 - Wall pressure

A.7 Cas test 7 : onde de détente à droite, contraction à gauche, $S_G/S_D = 0.5/1$.

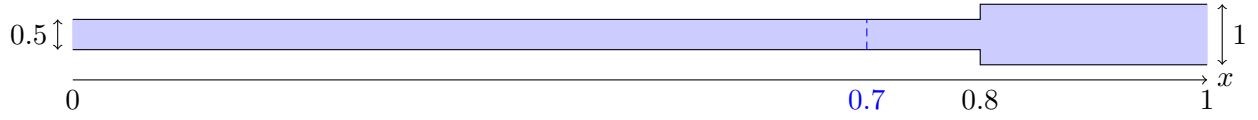


FIGURE A.57: Représentation d'une tube contracté à gauche.

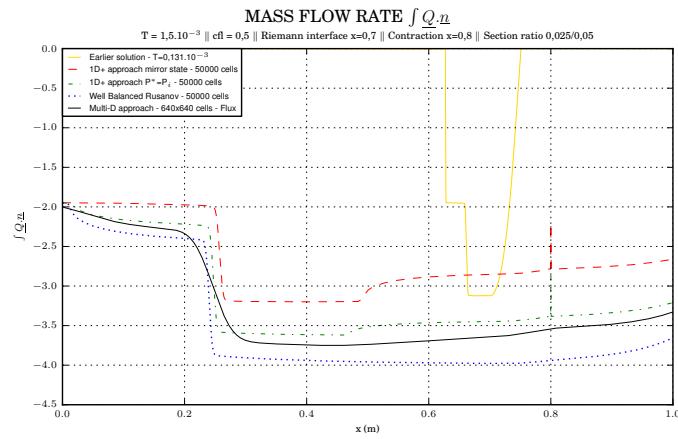


FIGURE A.58: Résultats cas 7 - Mass flow rate

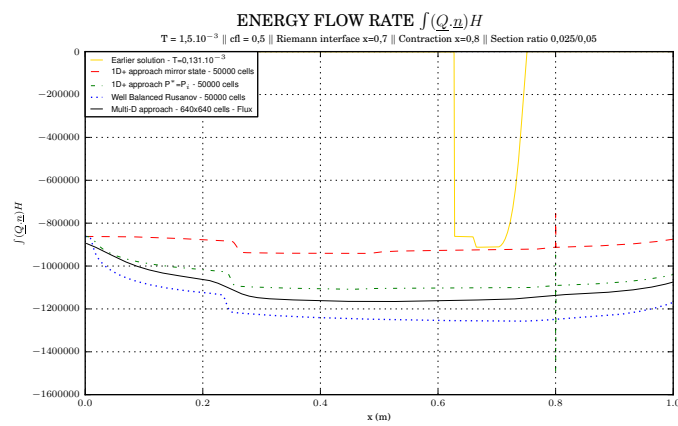


FIGURE A.59: Résultats cas 7 - Energy flow rate

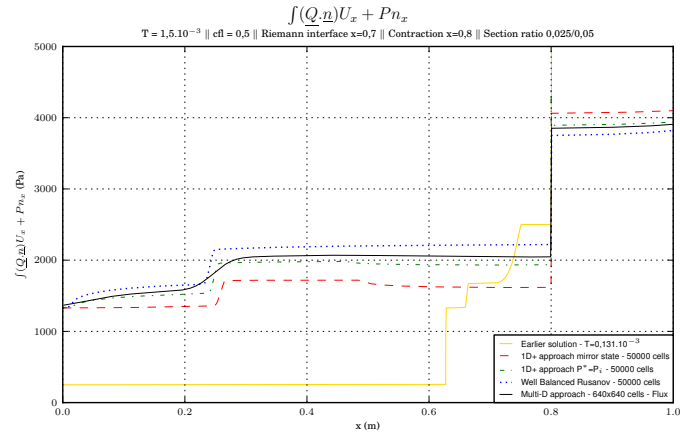
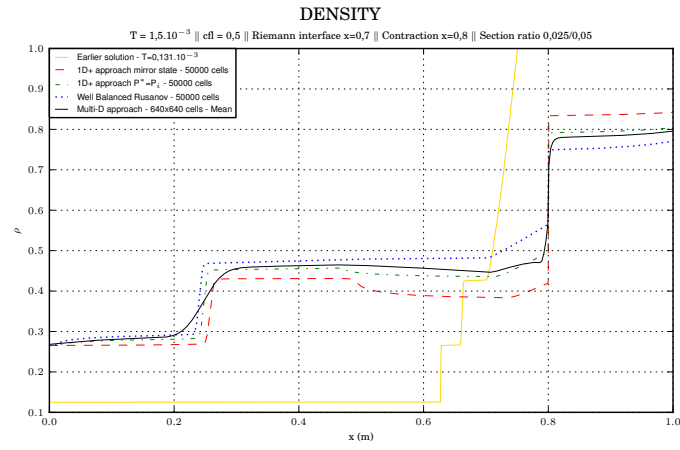
FIGURE A.60: Résultats cas 7 - Débit ux 

FIGURE A.61: Résultats cas 7 - Density

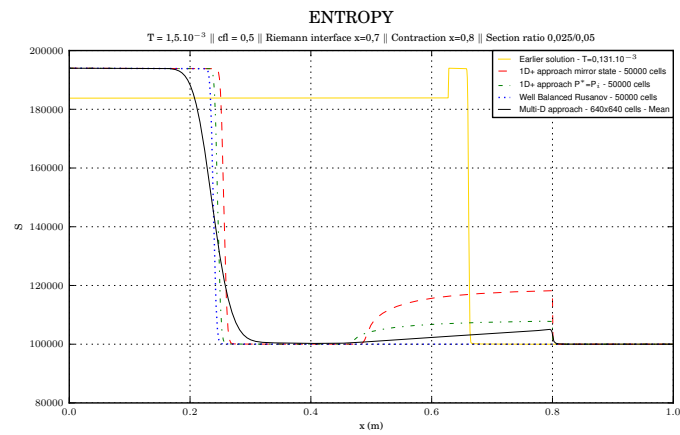


FIGURE A.62: Résultats cas 7 - Entropy

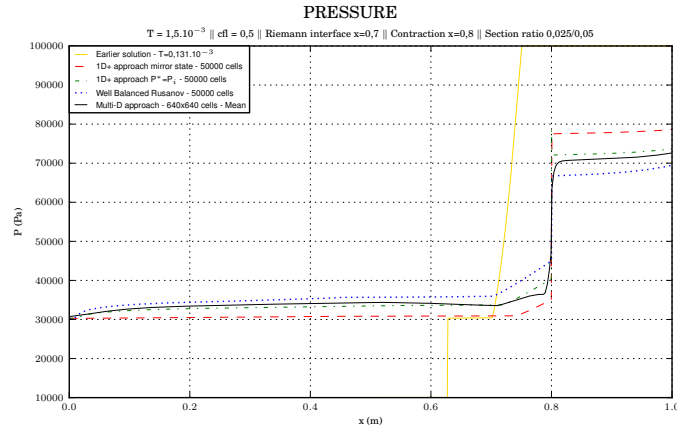


FIGURE A.63: Résultats cas 7 - Pressure

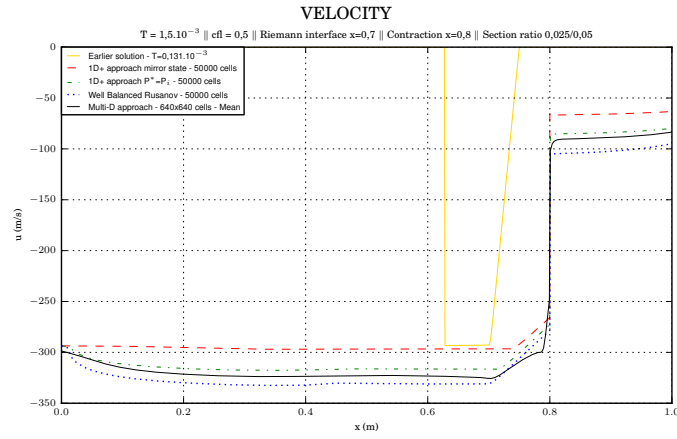


FIGURE A.64: Résultats cas 7 - Velocity

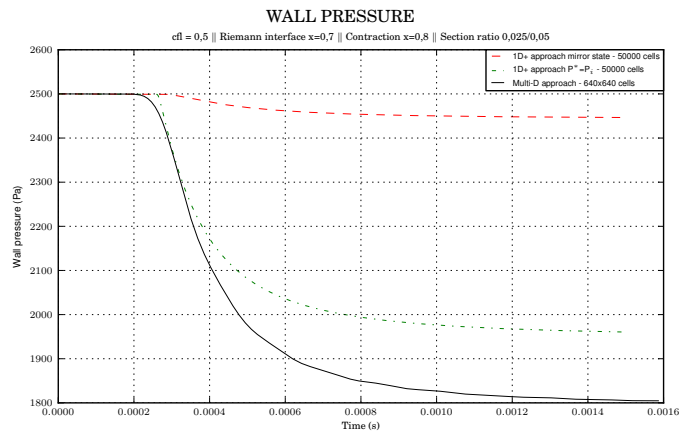


FIGURE A.65: Résultats cas 7 - Wall pressure

A.8 Cas test 8 : onde de détente à droite, contraction à gauche, $S_G/S_D = 0.01/1$.

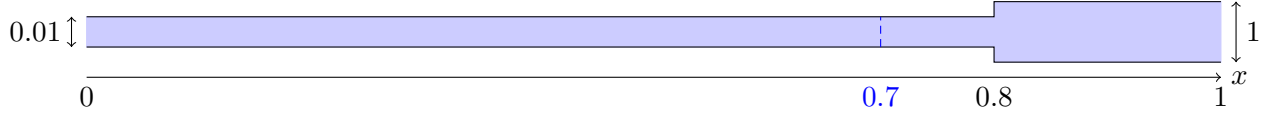


FIGURE A.66: Représentation d'une tube contracté à gauche.

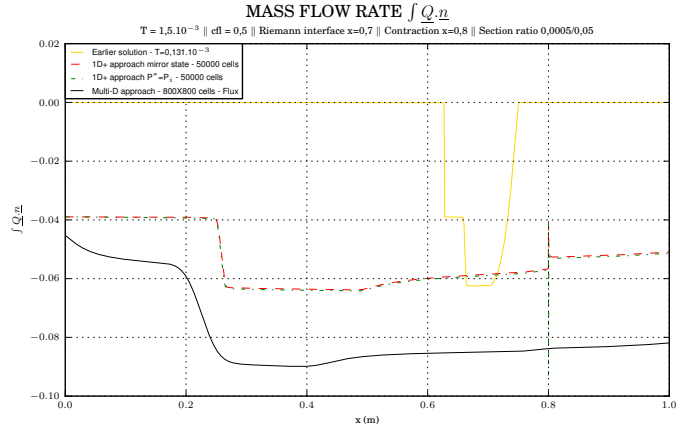


FIGURE A.67: Résultats cas 8 - Mass flow rate

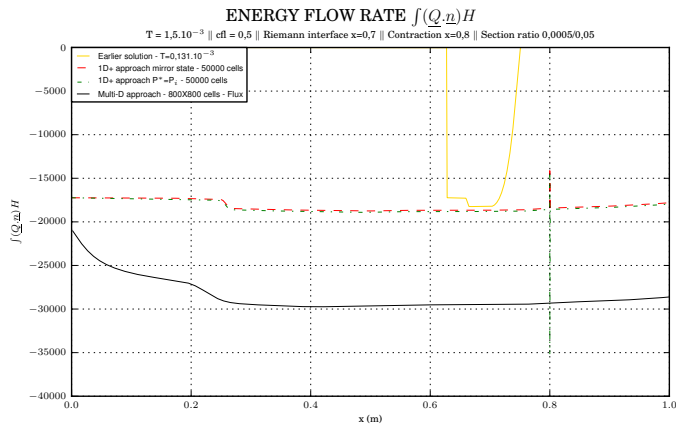


FIGURE A.68: Résultats cas 8 - Energy flow rate

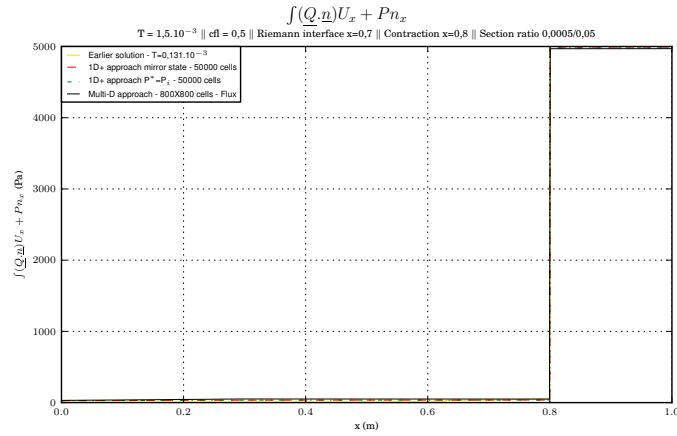
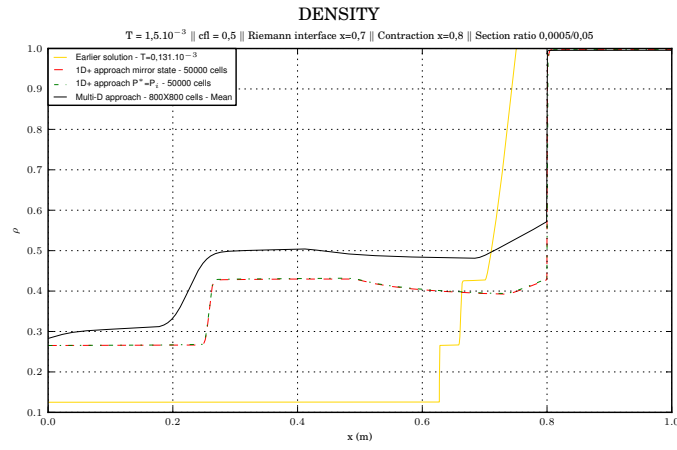
FIGURE A.69: Résultats cas 8 - Débit ux 

FIGURE A.70: Résultats cas 8 - Density

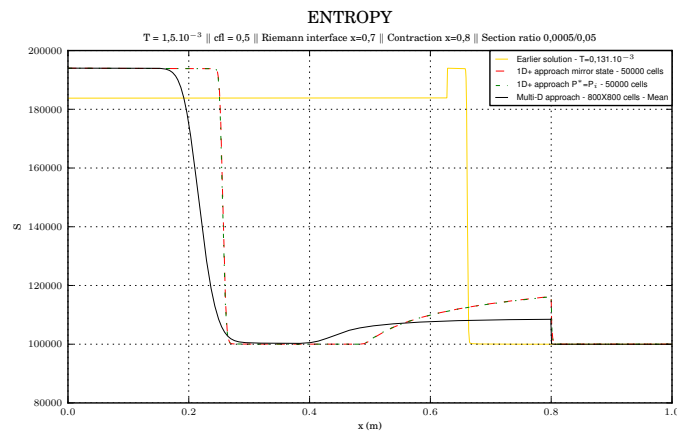


FIGURE A.71: Résultats cas 8 - Entropy

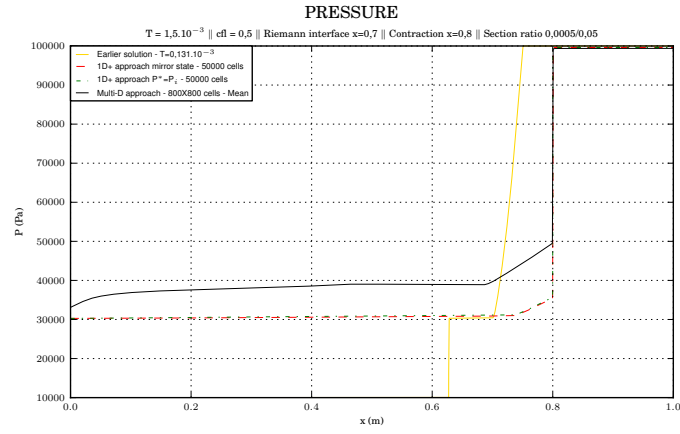


FIGURE A.72: Résultats cas 8 - Pressure

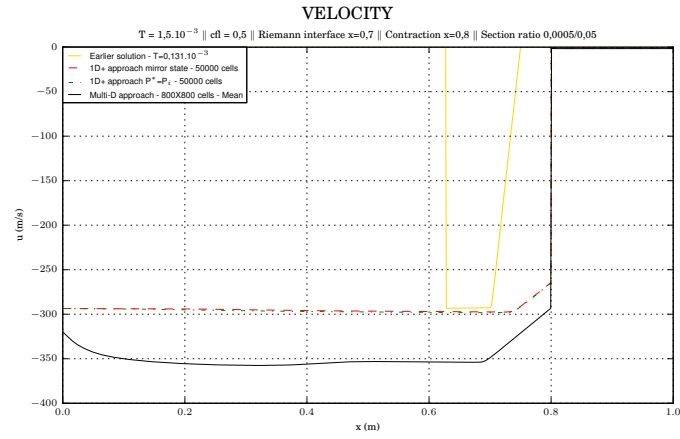


FIGURE A.73: Résultats cas 8 - Velocity

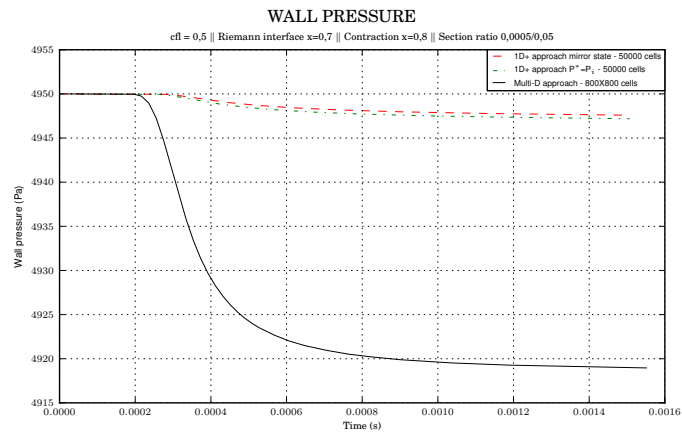


FIGURE A.74: Résultats cas 8 - Wall pressure

A.9 Cas test 9 : onde de choc à droite, contraction à droite, $S_G/S_D = 1/0.1$.

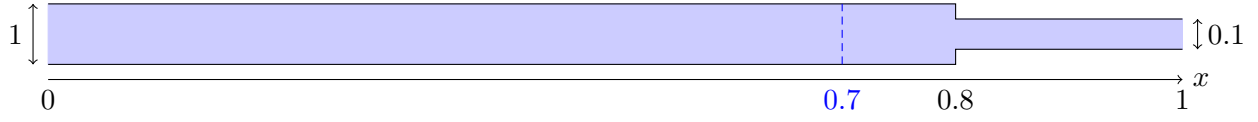


FIGURE A.75: Représentation d'un tube contracté à droite.

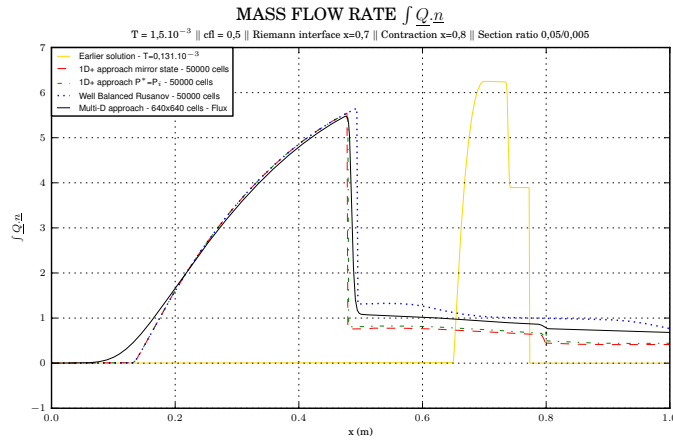


FIGURE A.76: Résultats cas 9 - Mass flow rate

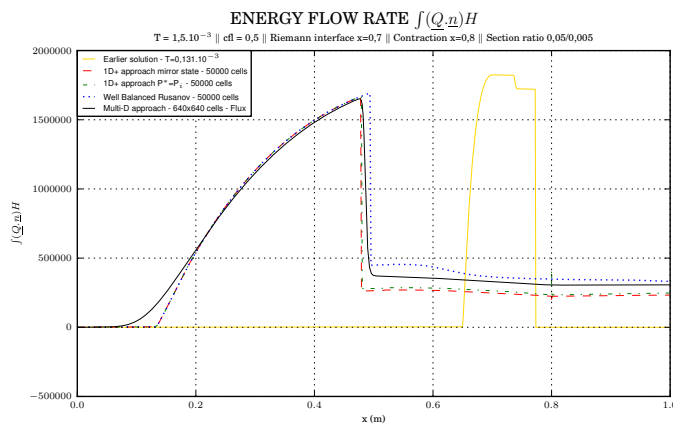


FIGURE A.77: Résultats cas 9 - Energy flow rate

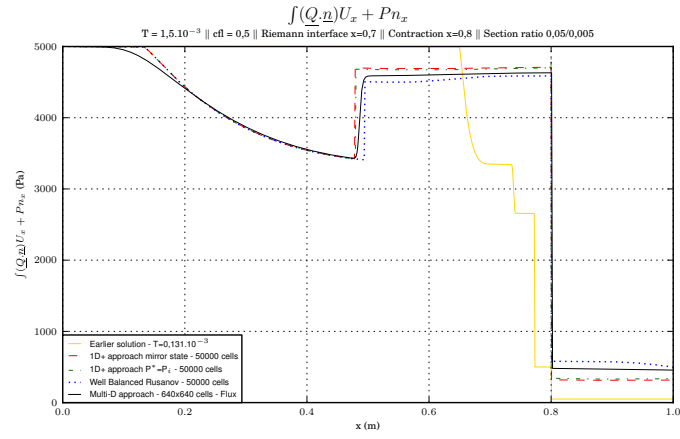
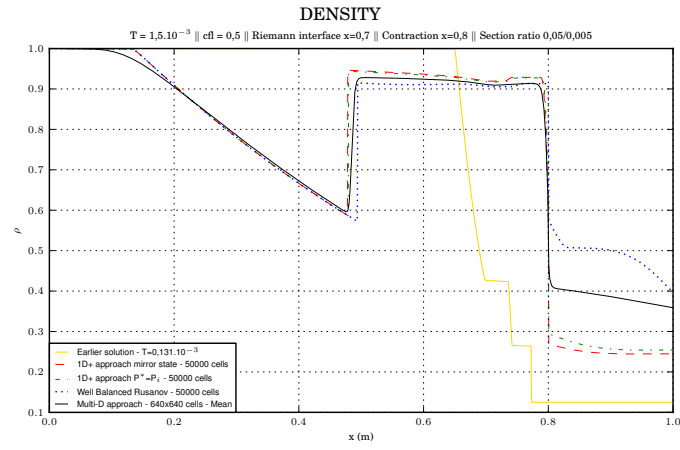
FIGURE A.78: Résultats cas 9 - Débit ux 

FIGURE A.79: Résultats cas 9 - Density

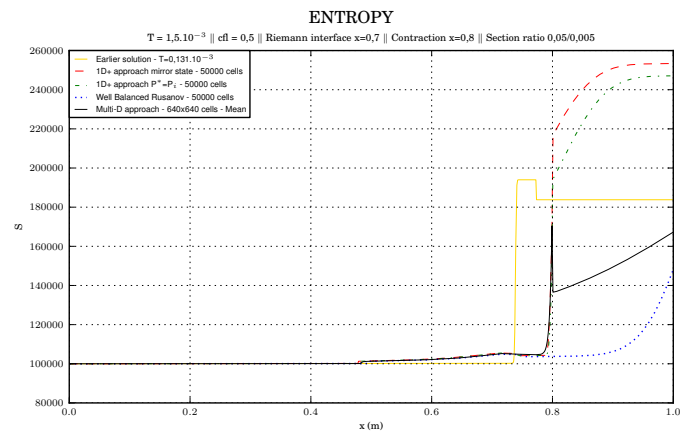


FIGURE A.80: Résultats cas 9 - Entropy

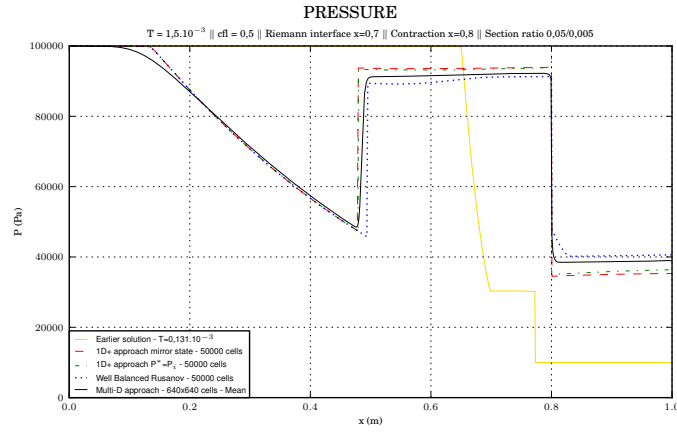


FIGURE A.81: Résultats cas 9 - Pressure

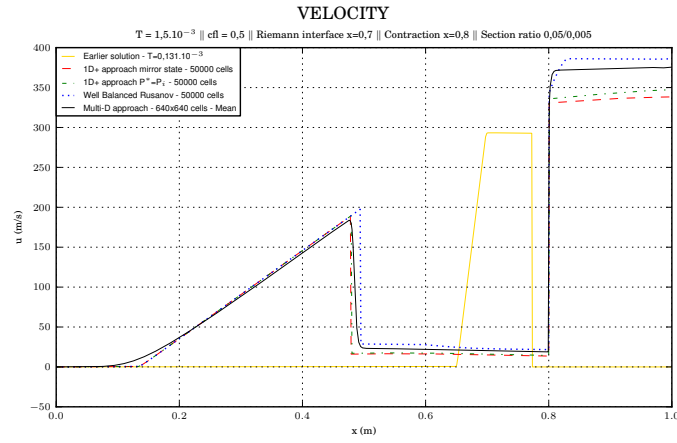


FIGURE A.82: Résultats cas 9 - Velocity

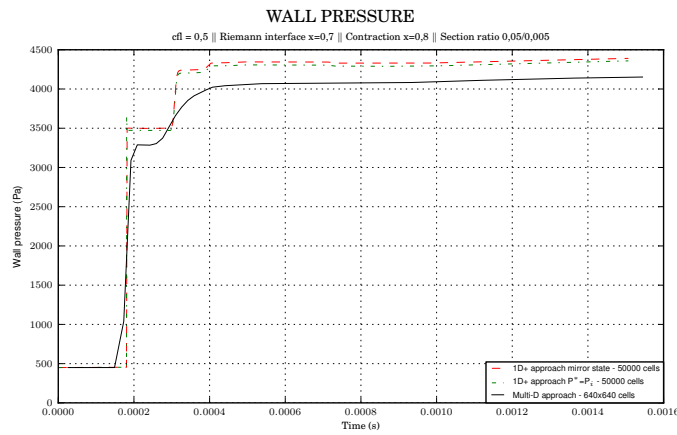


FIGURE A.83: Résultats cas 9 - Wall pressure

A.10 Cas test 10 : onde de choc à droite, contraction à droite, $S_G/S_D = 1/0.9$.

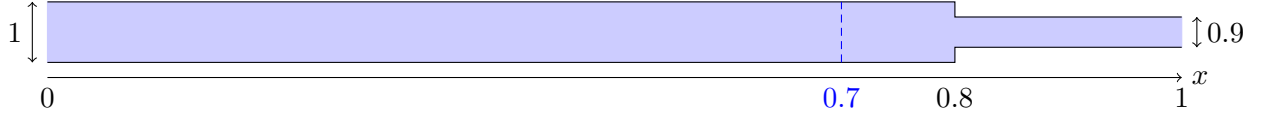


FIGURE A.84: Représentation d'un tube contracté à droite.

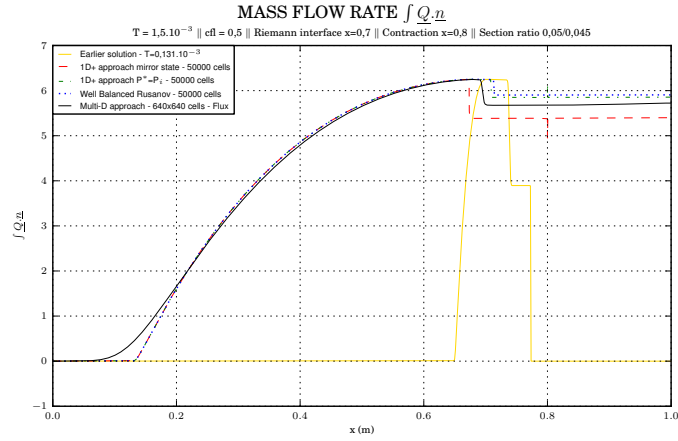


FIGURE A.85: Résultats cas 10 - Mass flow rate

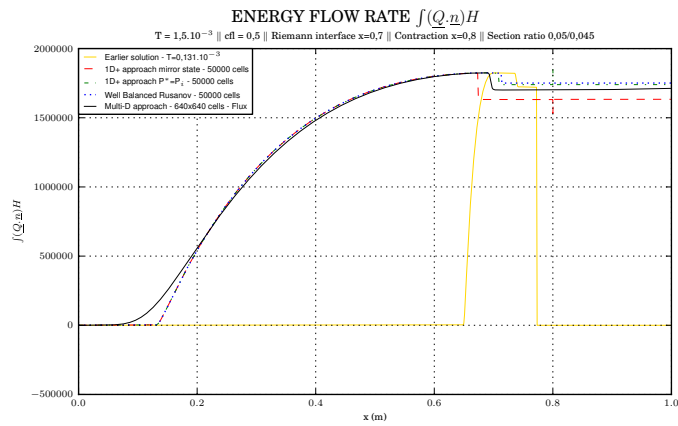


FIGURE A.86: Résultats cas 10 - Energy flow rate

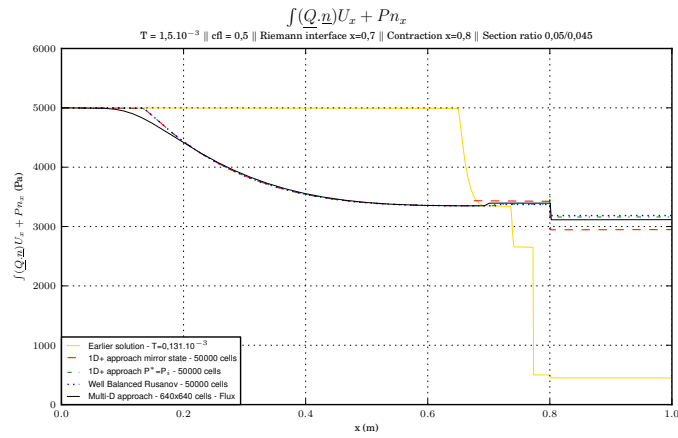
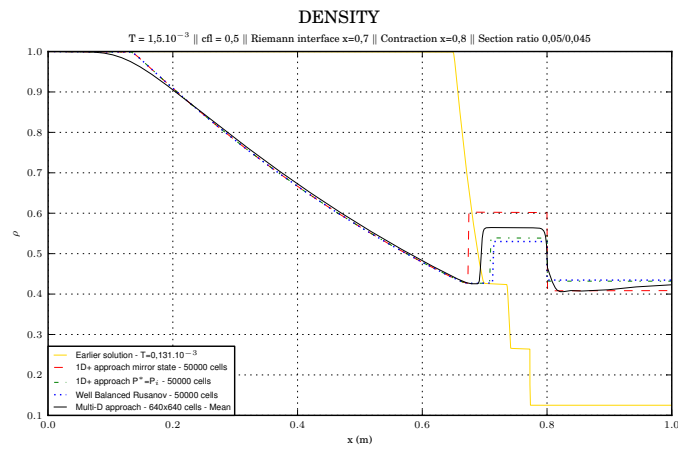
FIGURE A.87: Résultats cas 10 - Débit ux 

FIGURE A.88: Résultats cas 10 - Density

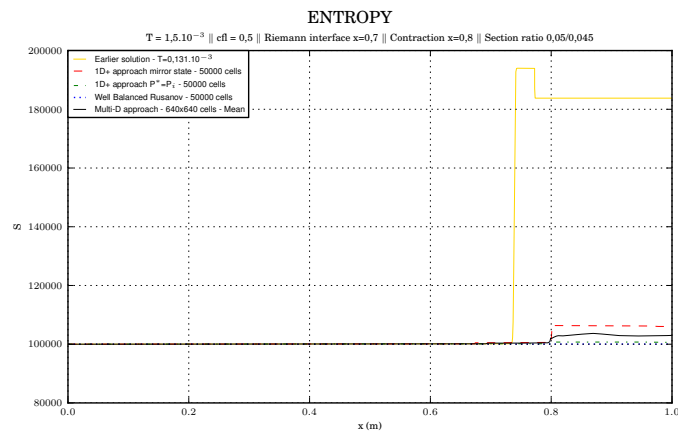


FIGURE A.89: Résultats cas 10 - Entropy

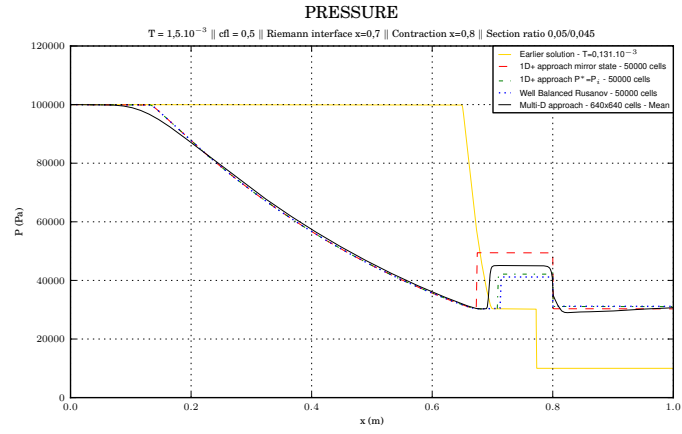


FIGURE A.90: Résultats cas 10 - Pressure

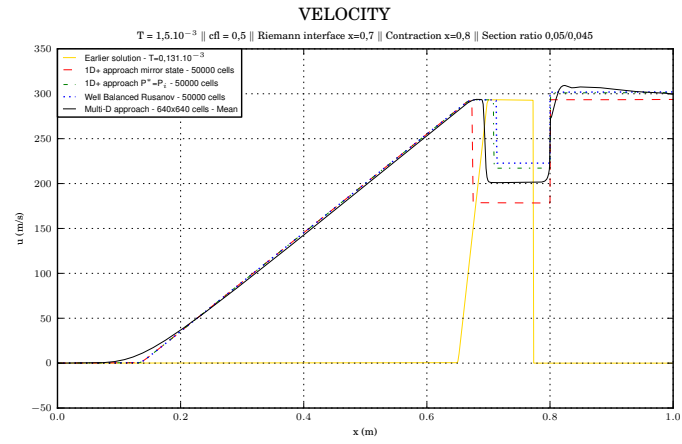


FIGURE A.91: Résultats cas 10 - Velocity

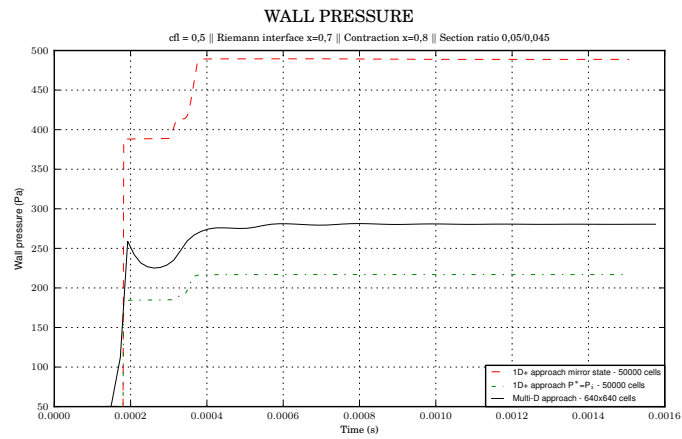


FIGURE A.92: Résultats cas 10 - Wall pressure

A.11 Cas test 11 : onde de détente à droite, contraction à droite, $S_G/S_D = 1/0.1$.

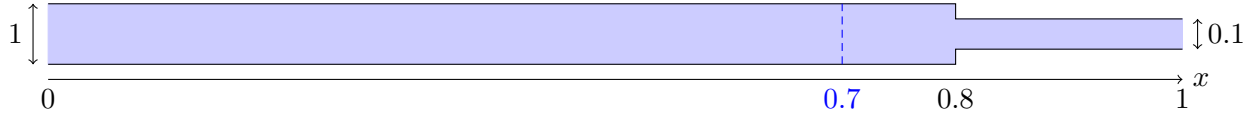


FIGURE A.93: Représentation d'un tube contracté à droite.

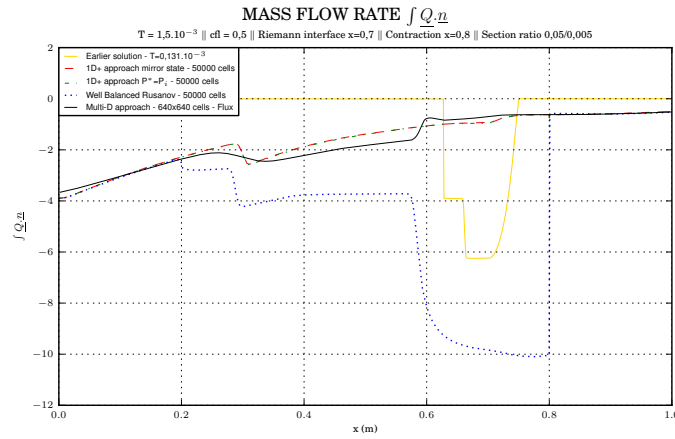


FIGURE A.94: Résultats cas 11 - Mass flow rate

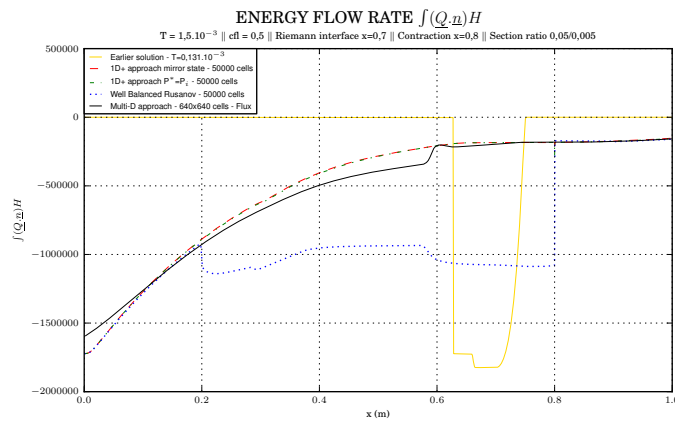


FIGURE A.95: Résultats cas 11 - Energy flow rate

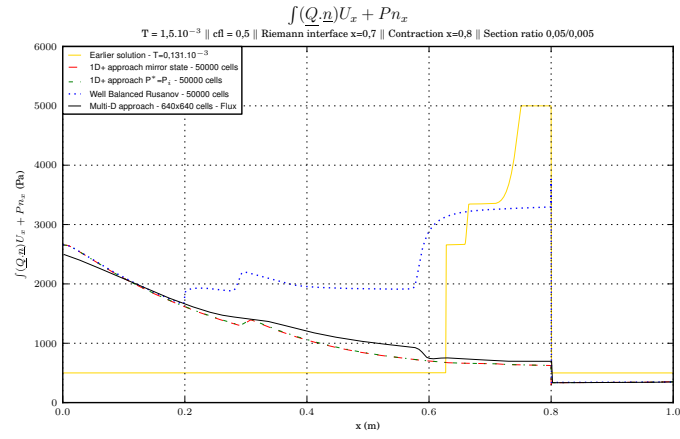
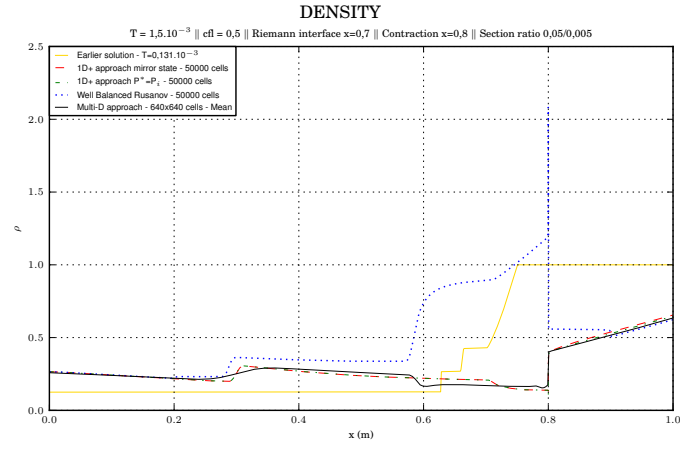
FIGURE A.96: Résultats cas 11 - Débit ux 

FIGURE A.97: Résultats cas 11 - Density

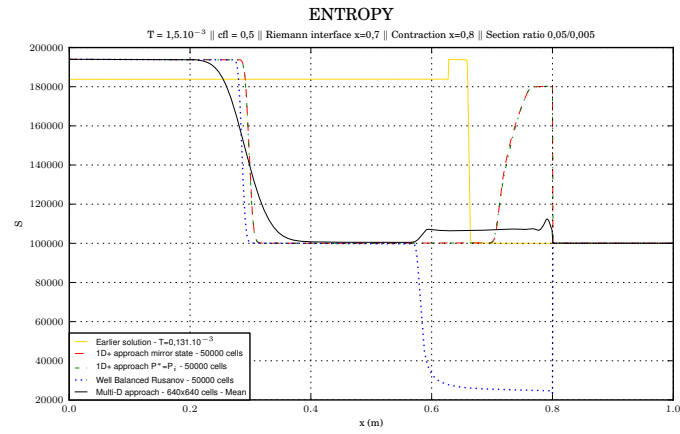


FIGURE A.98: Résultats cas 11 - Entropy

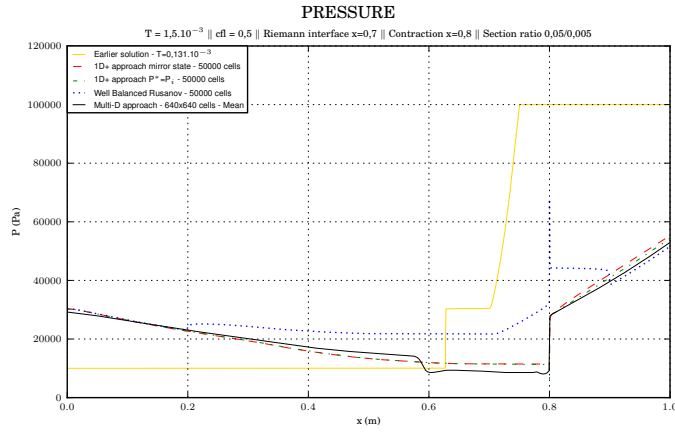


FIGURE A.99: Résultats cas 11 - Pressure

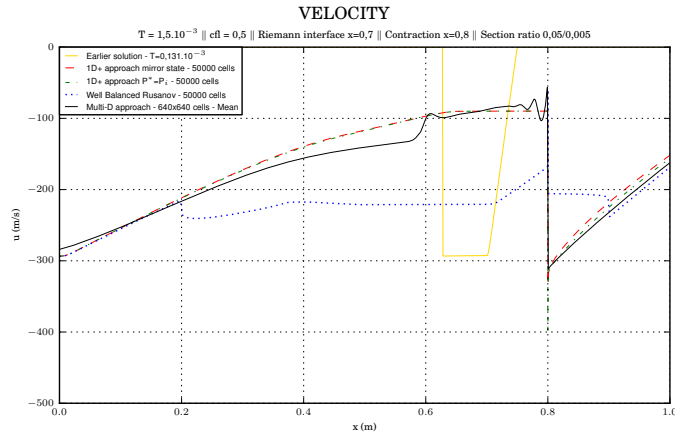


FIGURE A.100: Résultats cas 11 - Velocity

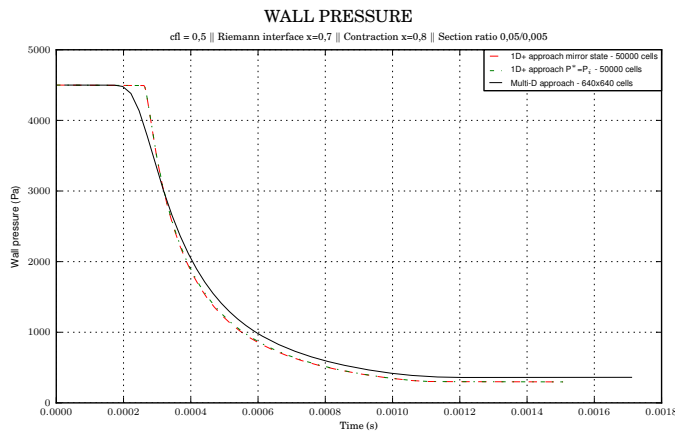


FIGURE A.101: Résultats cas 11 - Wall pressure

A.12 Cas test 12 : onde de détente à droite, contraction à droite, $S_G/S_D = 1/0.9$.

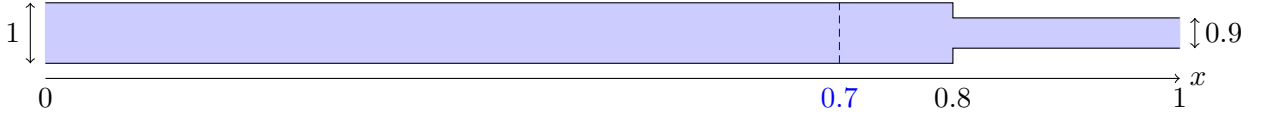


FIGURE A.102: Représentation d'un tube contracté à droite.

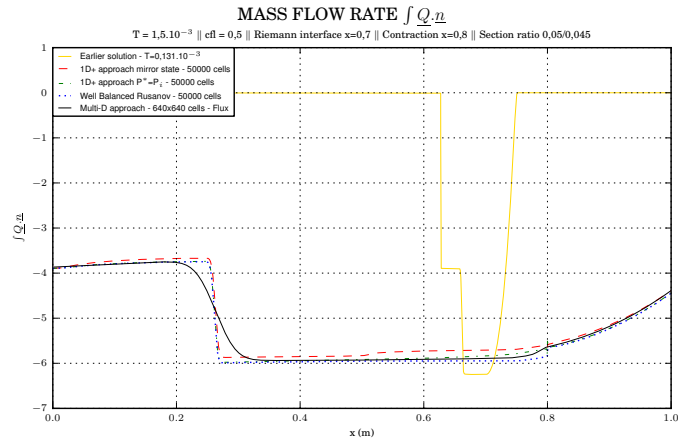


FIGURE A.103: Résultats cas 12 - Mass flow rate

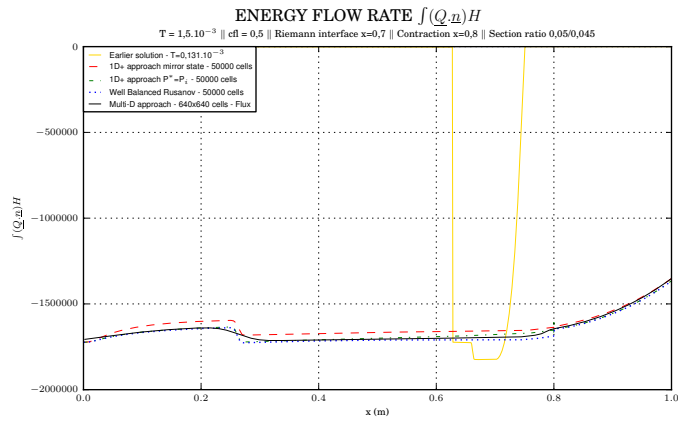


FIGURE A.104: Résultats cas 12 - Energy flow rate

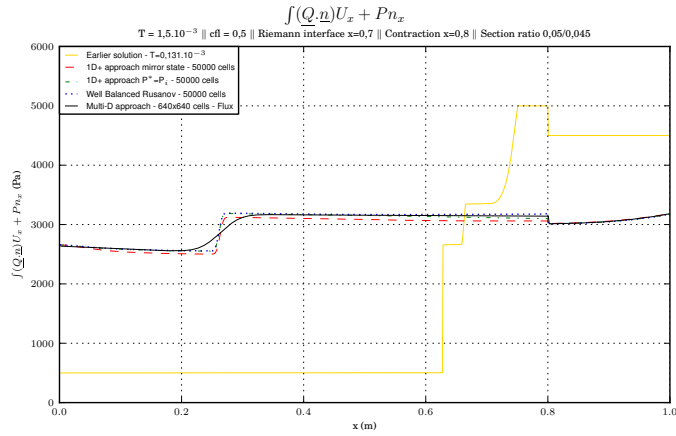
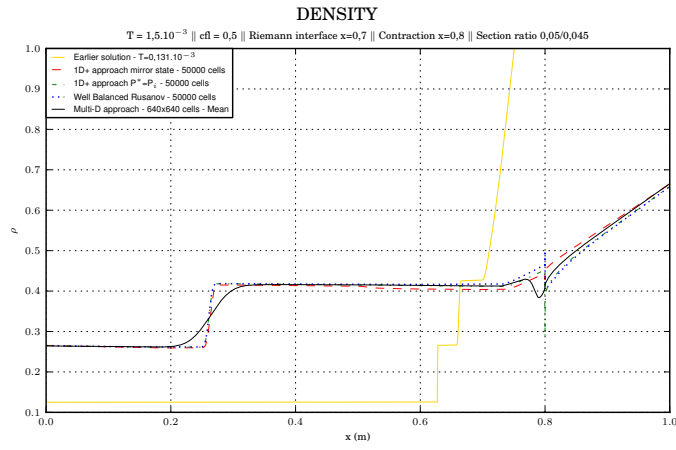
FIGURE A.105: Résultats cas 12 - Débit ux 

FIGURE A.106: Résultats cas 12 - Density

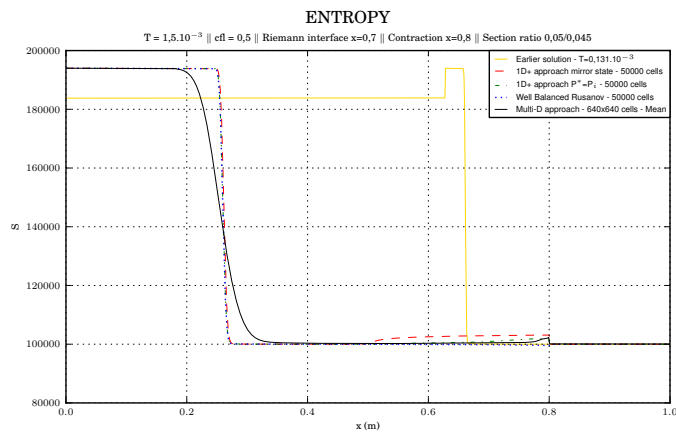


FIGURE A.107: Résultats cas 12 - Entropy

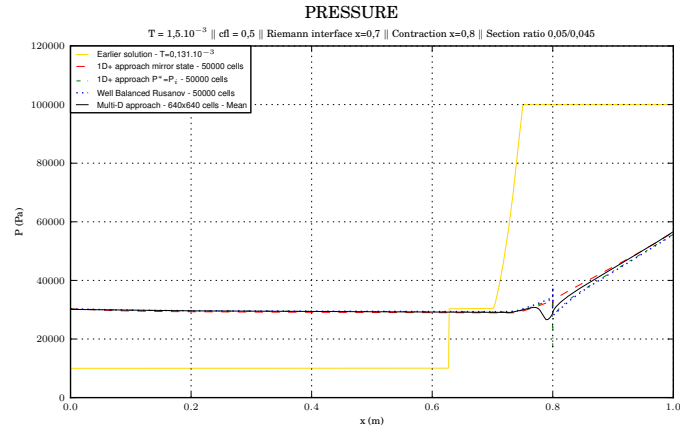


FIGURE A.108: Résultats cas 12 - Pressure

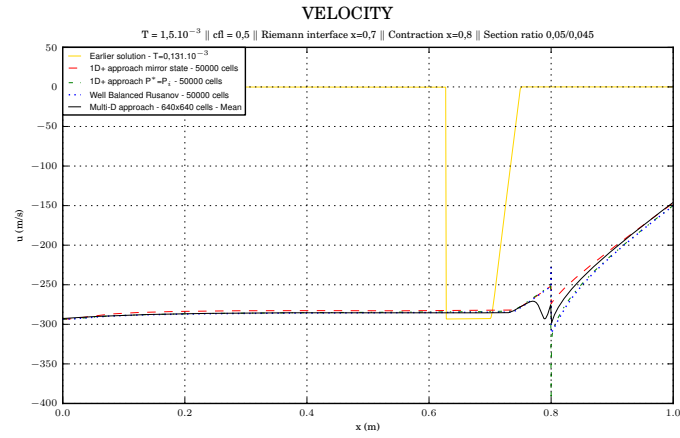


FIGURE A.109: Résultats cas 12 - Velocity

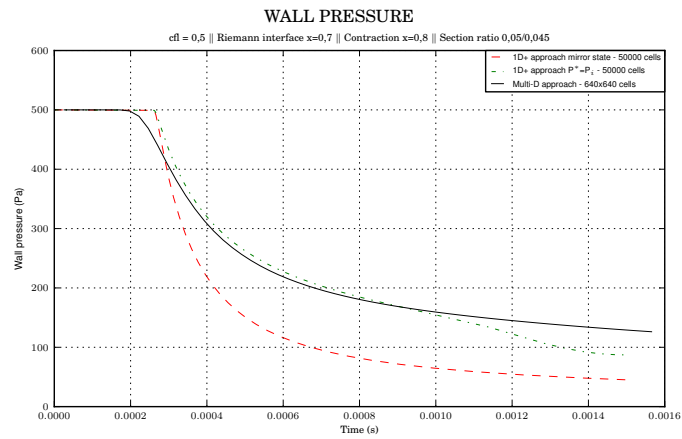


FIGURE A.110: Résultats cas 12 - Wall pressure

A.13 Cas test 13 : onde de choc à droite, contraction à gauche, $S_G/S_D = 0.1/1$.

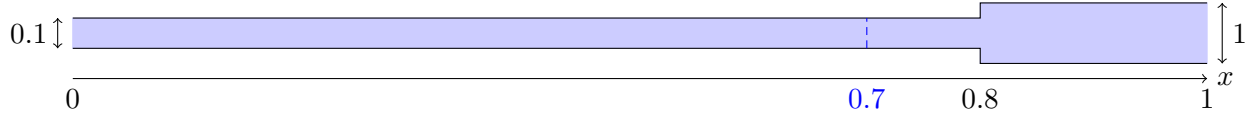


FIGURE A.111: Représentation d'une tube contracté à gauche.

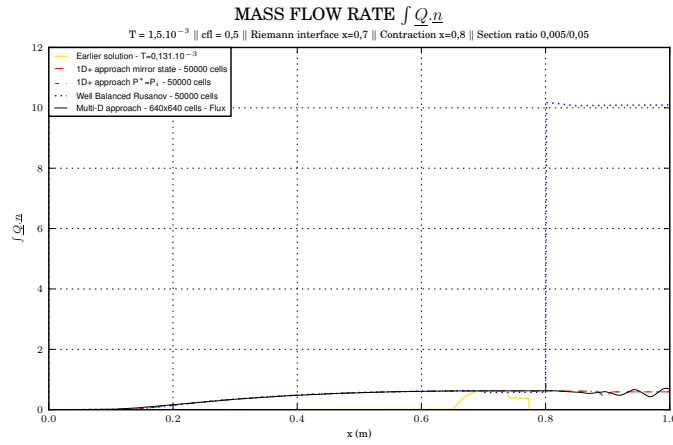


FIGURE A.112: Résultats cas 13 - Mass flow rate

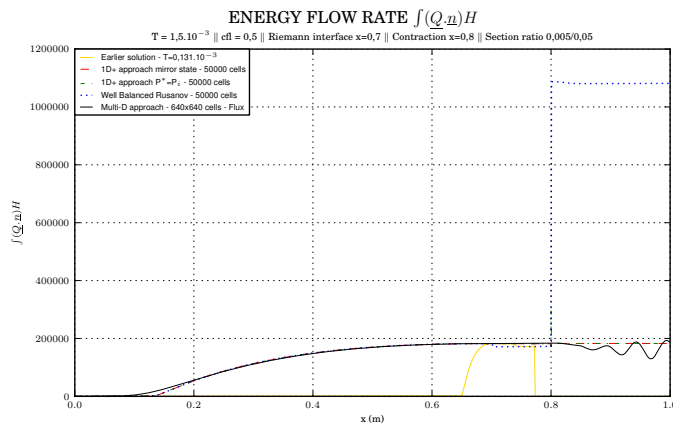


FIGURE A.113: Résultats cas 13 - Energy flow rate

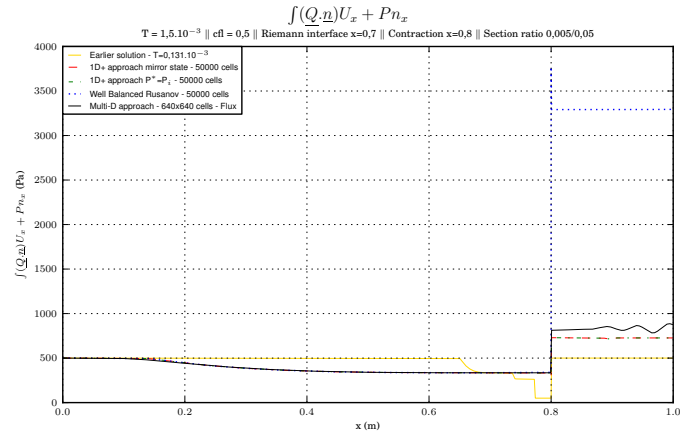
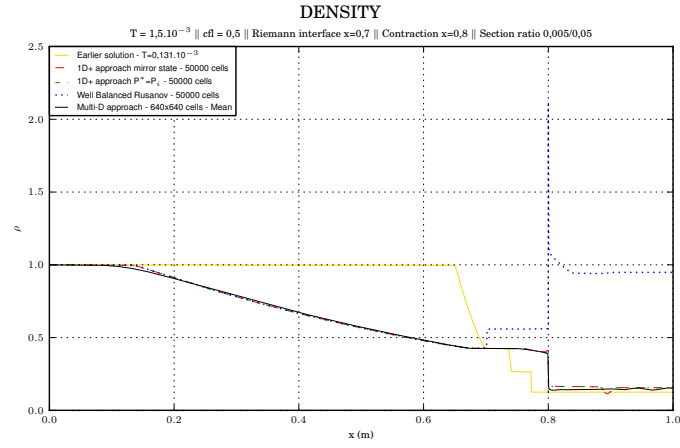
FIGURE A.114: Résultats cas 13 - Débit ux 

FIGURE A.115: Résultats cas 13 - Density

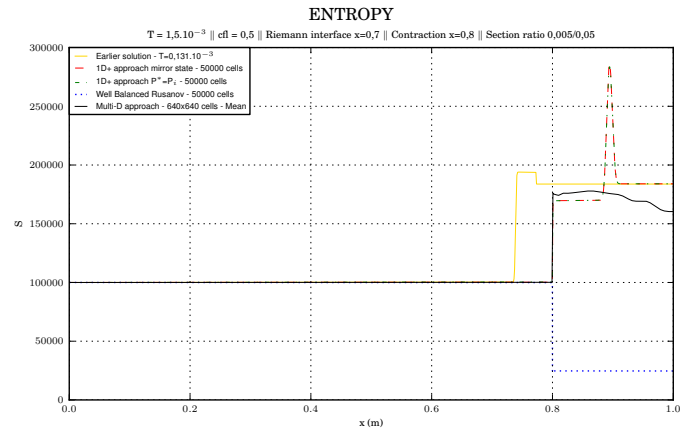


FIGURE A.116: Résultats cas 13 - Entropy

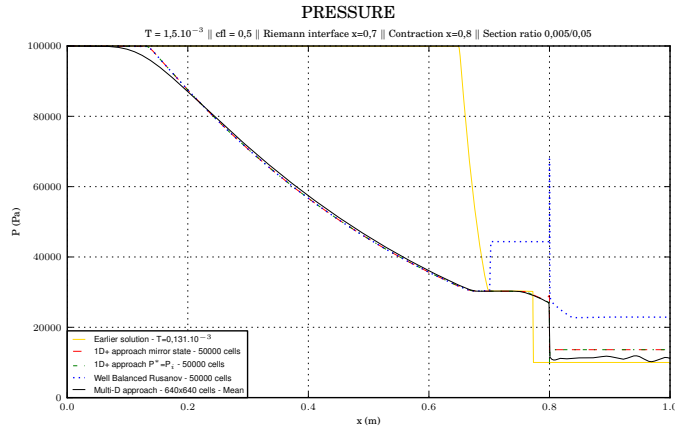


FIGURE A.117: Résultats cas 13 - Pressure

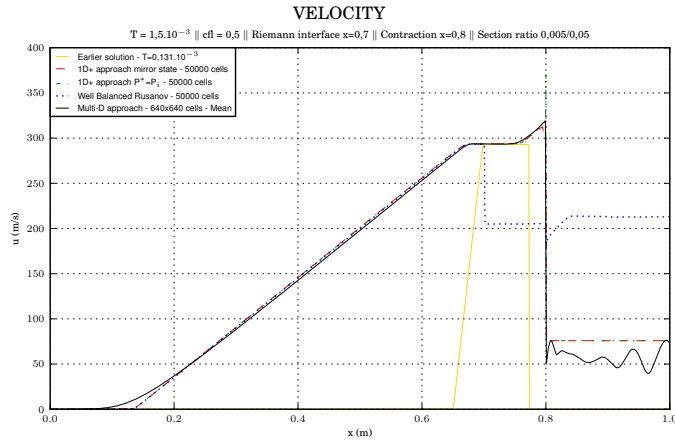


FIGURE A.118: Résultats cas 13 - Velocity

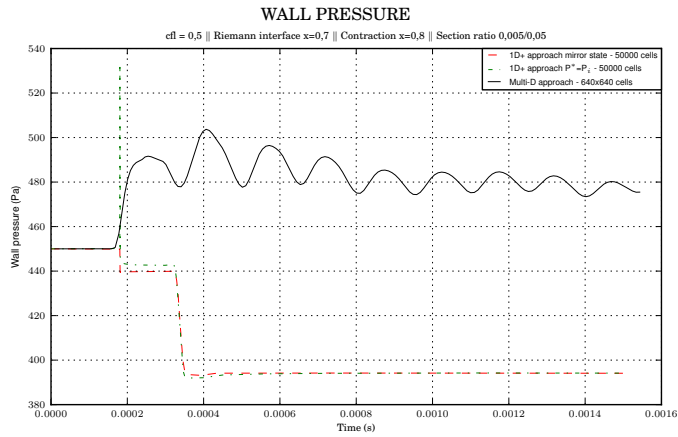


FIGURE A.119: Résultats cas 13 - Wall pressure

A.14 Cas test 14 : onde de choc à droite, contraction à gauche, $S_G/S_D = 0.9/1$.

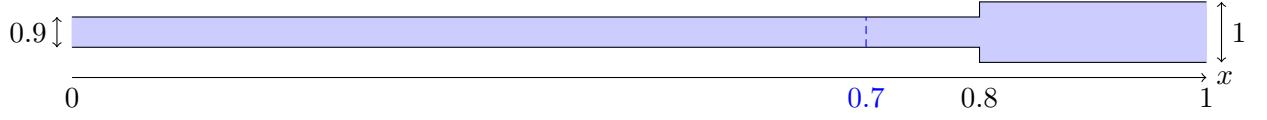


FIGURE A.120: Représentation d'une tube contracté à gauche.

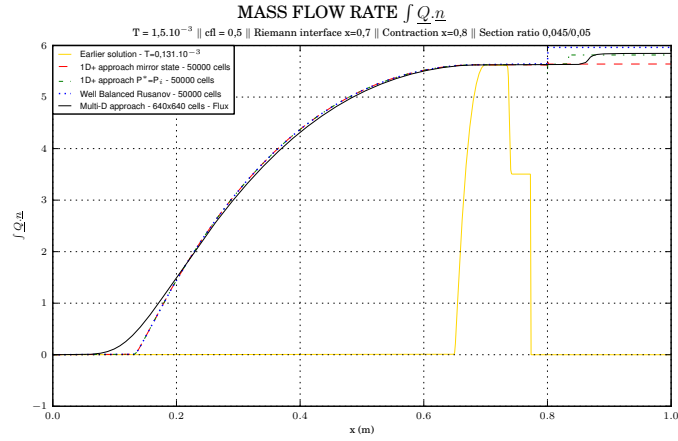


FIGURE A.121: Résultats cas 14 - Mass flow rate

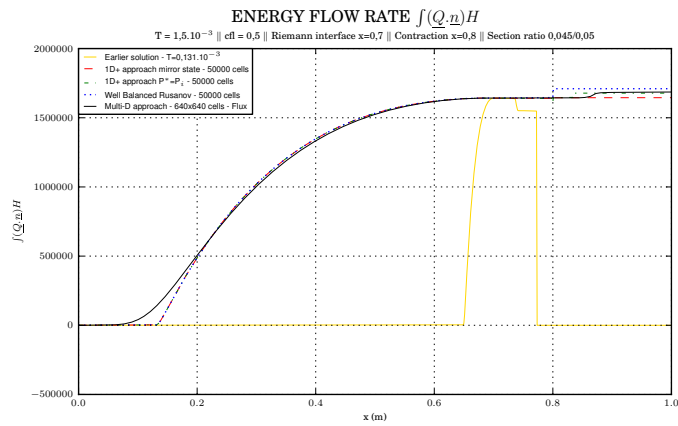


FIGURE A.122: Résultats cas 14 - Energy flow rate

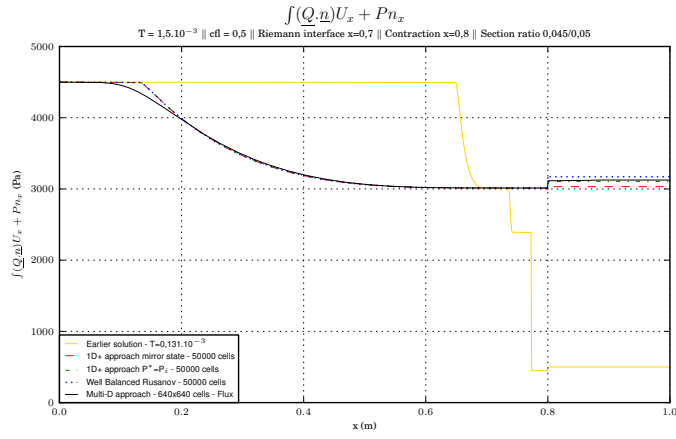


FIGURE A.123: Résultats cas 14 - Débit ux

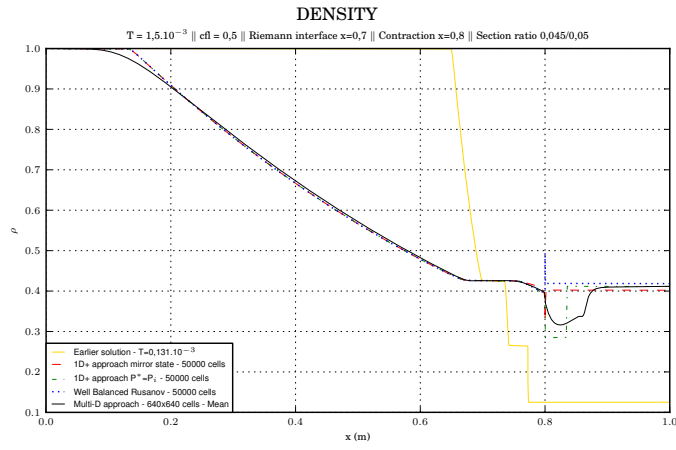


FIGURE A.124: Résultats cas 14 - Density

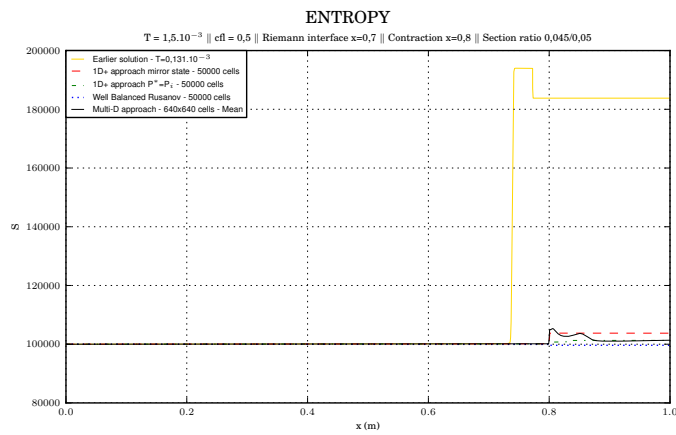


FIGURE A.125: Résultats cas 14 - Entropy

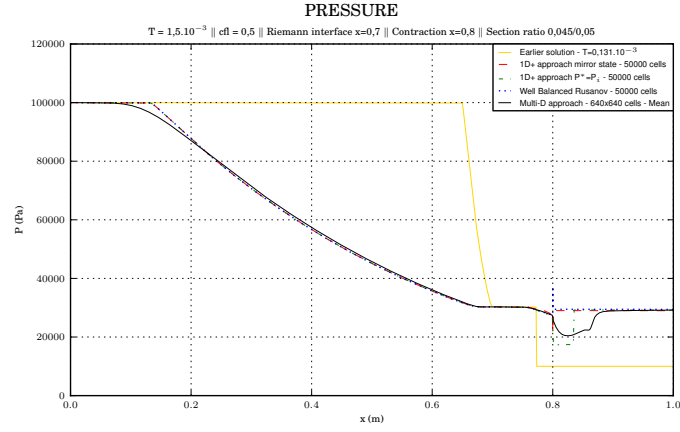


FIGURE A.126: Résultats cas 14 - Pressure

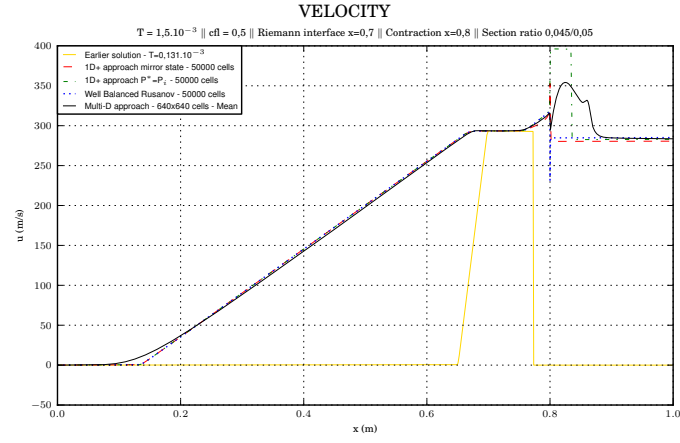


FIGURE A.127: Résultats cas 14 - Velocity

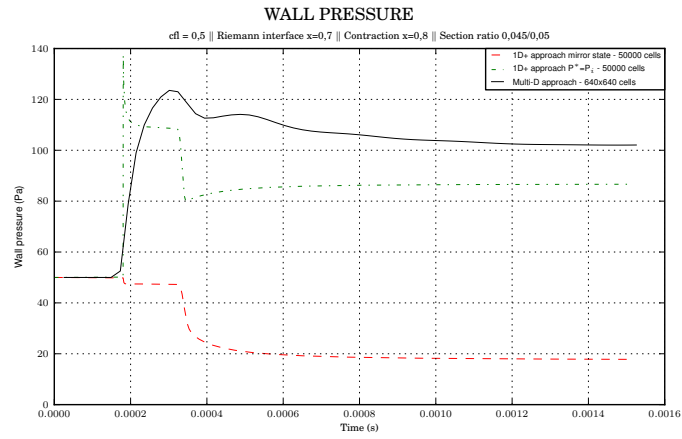


FIGURE A.128: Résultats cas 14 - Wall pressure

A.15 Cas test 15 : onde de détente à droite, contraction à gauche, $S_G/S_D = 0.1/1$.

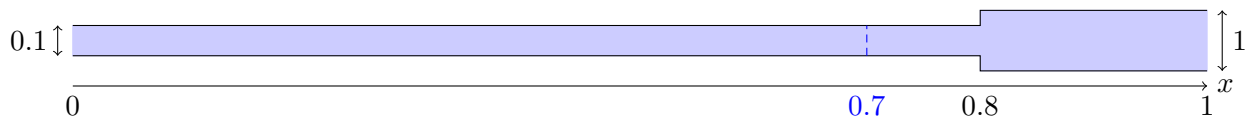


FIGURE A.129: Représentation d'une tube contracté à gauche.

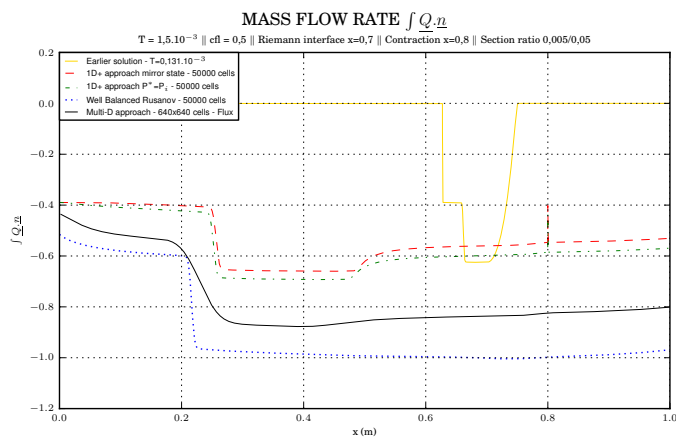


FIGURE A.130: Résultats cas 15 - Mass flow rate

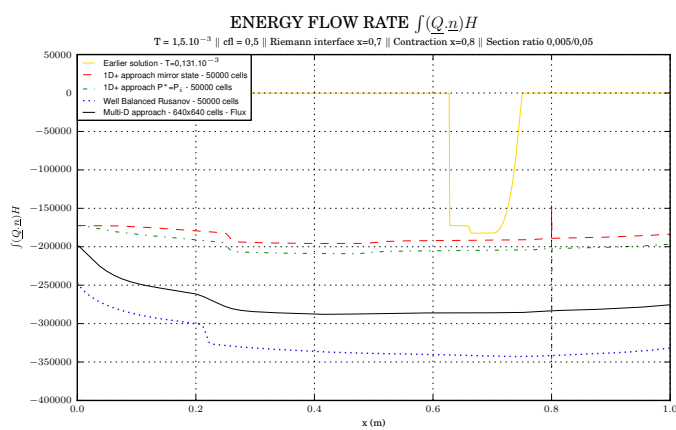


FIGURE A.131: Résultats cas 15 - Energy flow rate

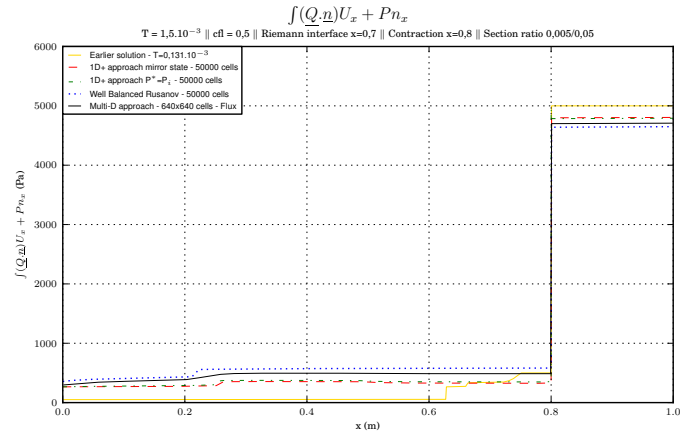
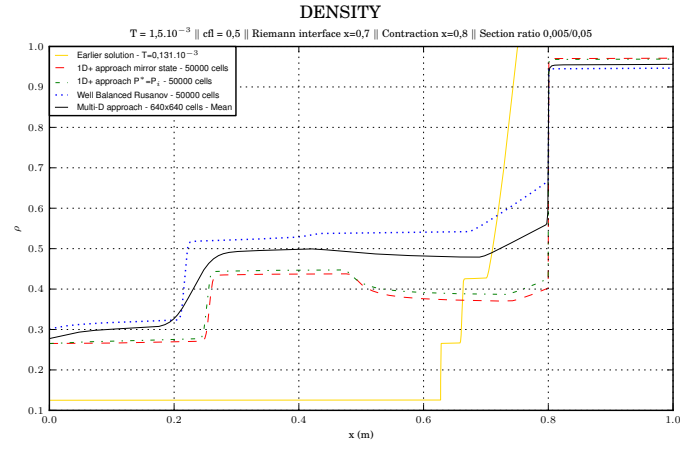
FIGURE A.132: Résultats cas 15 - Débit ux 

FIGURE A.133: Résultats cas 15 - Density

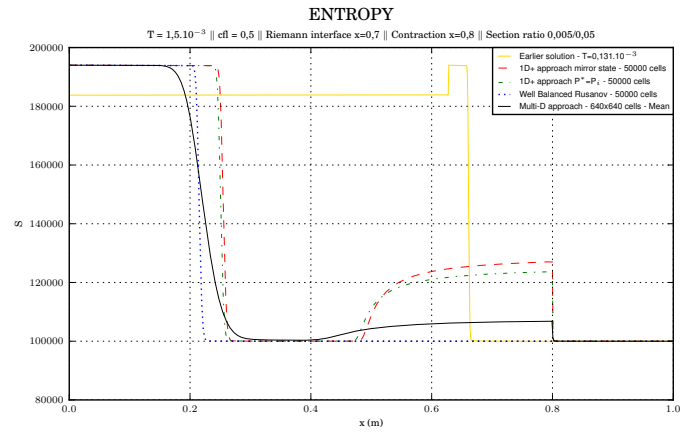


FIGURE A.134: Résultats cas 15 - Entropy

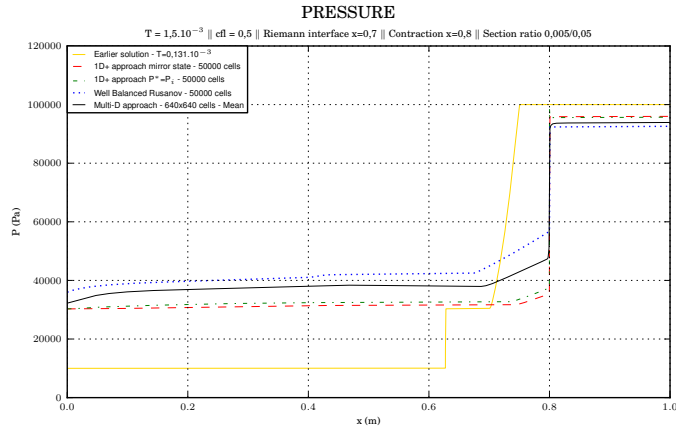


FIGURE A.135: Résultats cas 15 - Pressure

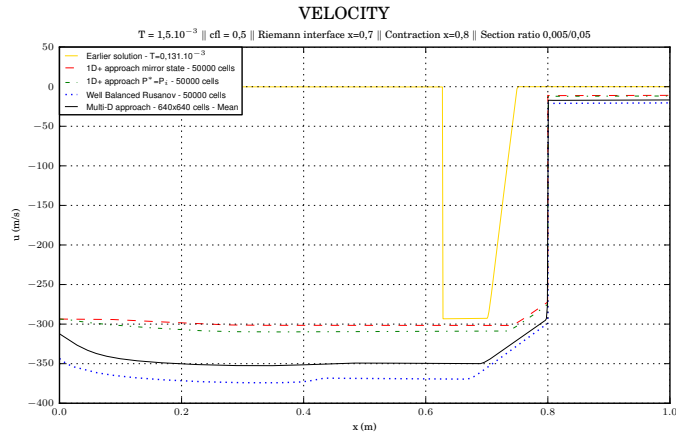


FIGURE A.136: Résultats cas 15 - Velocity

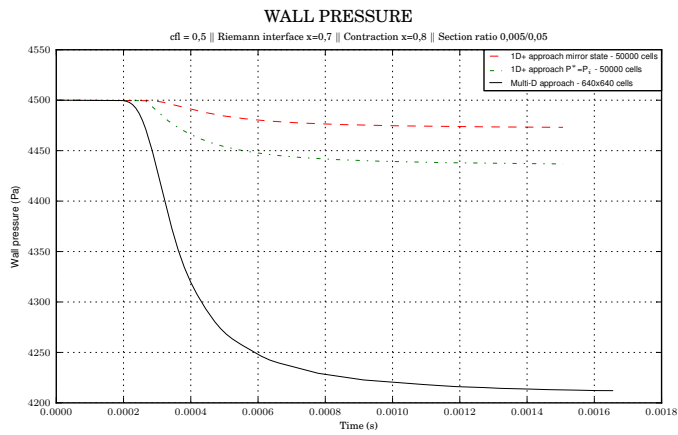


FIGURE A.137: Résultats cas 15 - Wall pressure

A.16 Cas test 16 : onde de détente à droite, contraction à gauche, $S_G/S_D = 0.9/1$.

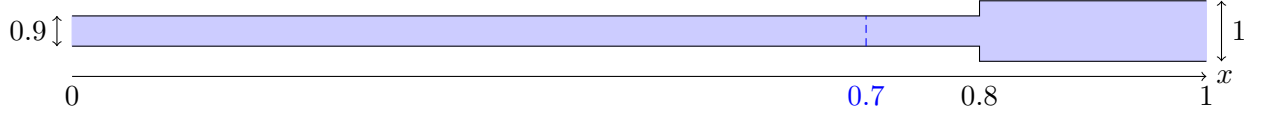


FIGURE A.138: Représentation d'une tube contracté à gauche.

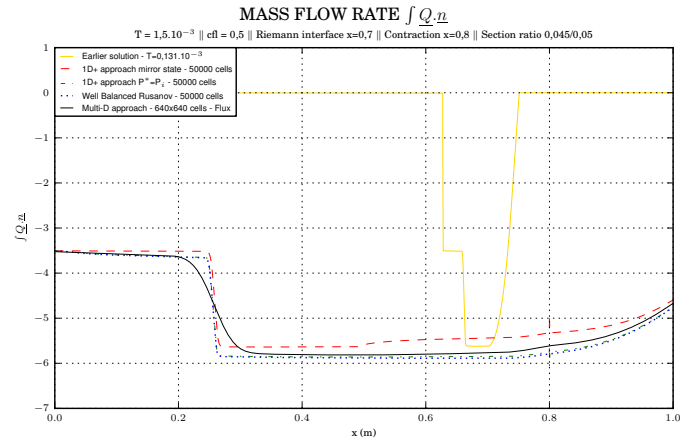


FIGURE A.139: Résultats cas 16 - Mass flow rate

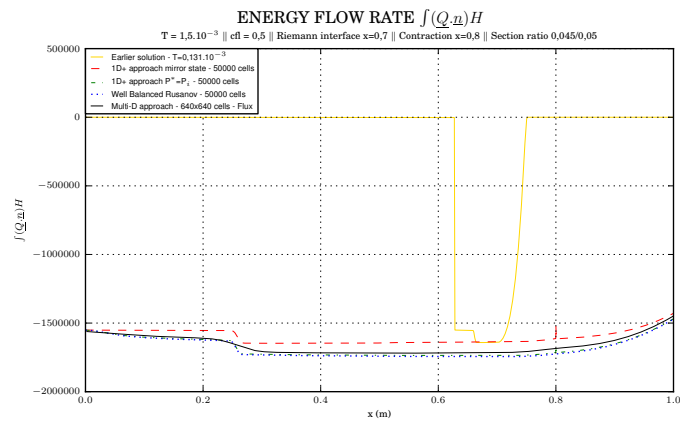


FIGURE A.140: Résultats cas 16 - Energy flow rate

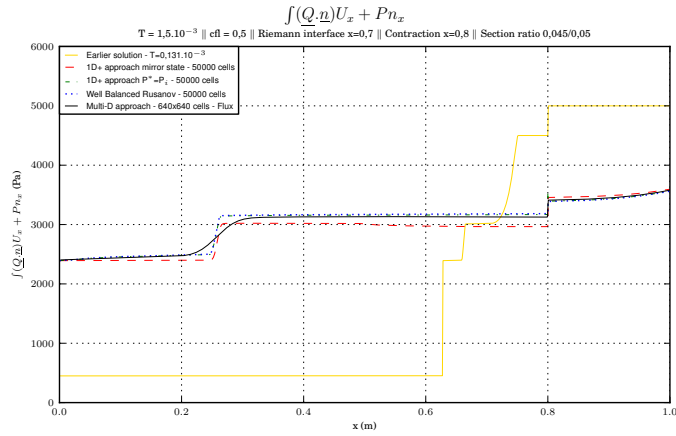


FIGURE A.141: Résultats cas 16 - Débit ux

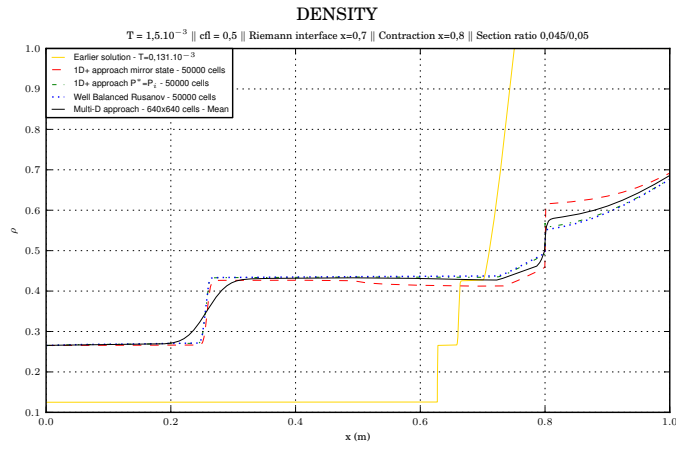


FIGURE A.142: Résultats cas 16 - Density

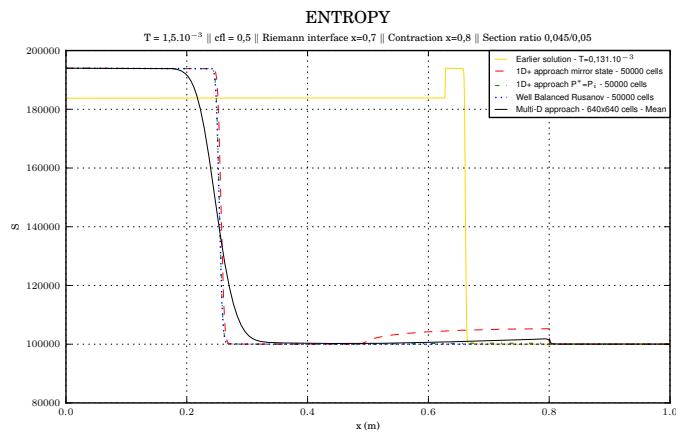


FIGURE A.143: Résultats cas 16 - Entropy

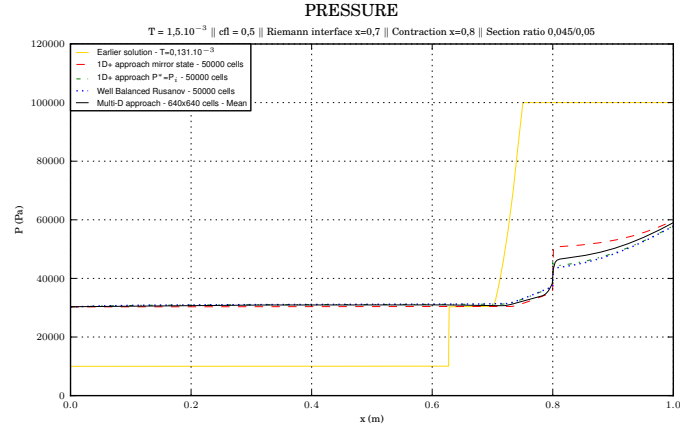


FIGURE A.144: Résultats cas 16 - Pressure

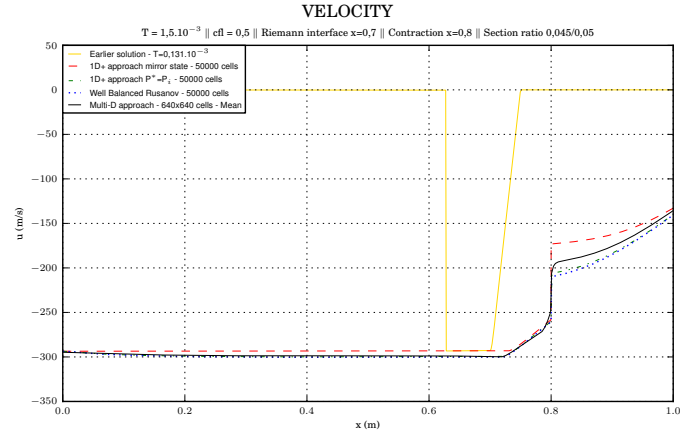


FIGURE A.145: Résultats cas 16 - Velocity

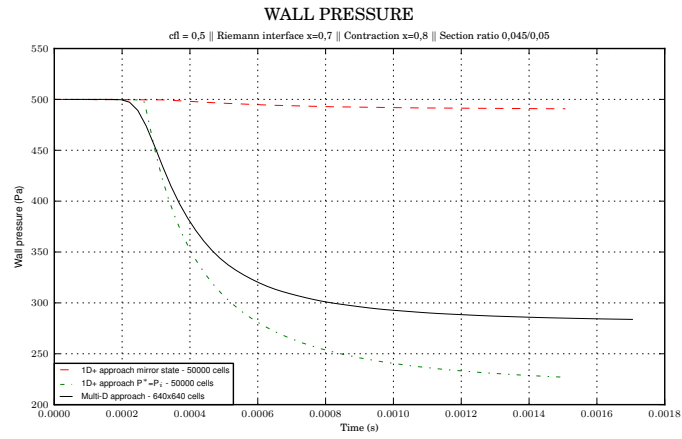


FIGURE A.146: Résultats cas 16 - Wall pressure

Chapitre 2 :

Une approche intégrale pour la simulation d'écoulements fluides en milieu encombré

Ce chapitre est consacré à la construction d'une approche intégrale multidimensionnelle pour la simulation d'écoulements de fluides compressibles en domaines encombrés d'obstacles. Ce travail fait suite au chapitre précédent, par l'utilisation de la forme intégrale des équations sur la base du système d'équations différentielles de Navier-Stokes ou d'Euler. On se place une fois de plus dans le cadre d'un écoulement compressible monophasique.

Le fluide évolue donc dans un grand domaine physique encombré par un grand nombre de petits obstacles. On intègre les équations en temps puis en espace sur un volume fini quelconque pouvant contenir plusieurs types d'obstacles, tels que des éléments tubulaires ou des plaques "infiniment minces". Dans tous les cas, *les obstacles sont considérés être non-perméables et stationnaires*. La méthode est construite de manière à converger en maillage vers les solutions d'une approche "purement CFD", c'est à dire dans le cas d'une porosité uniformément égale à 1 (pour un raffinement "infini").

La méthode a été testée sur deux cas tests, l'un de vérification et l'autre de validation. Le premier cas test de vérification de la méthode consiste à laisser s'écouler un fluide dans un domaine tubulaire à plusieurs intercanaux indépendants, séparés par des crayons parallèles. La solution exacte est connue et correspond à un écoulement stationnaire, uniforme entre deux crayons et localement unidirectionnel. En considérant des vitesses, pressions et densités différentes dans chaque sous-canal, et avec un maillage adapté, on vérifie informatiquement qu'il n'y a aucune communication entre les intercanaux. Ce cas test permet également d'observer l'effet du raffinement de maillage latéral, de mesurer l'impact d'un maillage non adapté, et de vérifier le bon comportement lors de la présence de mailles totalement solides.

Le second cas test est un modèle de transition d'un milieu fluide à un milieu poreux. Le domaine est de type tubulaire, infini en amont et en aval et composé d'une partie amont uniformément fluide et d'une zone aval encombrée de tubes alignés dans le sens de l'écoulement, avec une interface de transition discontinue entre les milieux. On cherche à obtenir un écoulement stationnaire, dont on ne connaît qu'une solution analytique approchée paramétrée par la pression à l'interface de transition fluide/poreux. Afin de valider la méthode, les résultats obtenus sur ce cas test sont ensuite comparés aux résultats obtenus sur maillage très fin adapté au domaine purement fluide.

Ce chapitre correspond à un article qui a été soumis en 2015 à la revue *International Journal on Finite Volumes* sous le titre *An integral approach to compute compressible fluid flows in domains containing obstacles* et co-écrit par J-M. Hérard et X. Martin.

An integral approach to compute compressible fluid flows in domains containing obstacles

Jean-Marc Hérard[†]

[†] *EDF R&D, MFEE, 6 quai Watier, F78400, Chatou,
I2M, UMR CNRS 7353, 39 rue Joliot Curie, F13453 Marseille.
jean-marc.herard@edf.fr*

Xavier Martin^{*}

^{*} *EDF R&D, MFEE, 6 quai Watier, F78400, Chatou,
I2M, UMR CNRS 7353, 39 rue Joliot Curie, F13453 Marseille.
xavier-x.martin@edf.fr*

Abstract

We detail in this paper an integral approach in order to cope with the computation of flows of a compressible fluid in a physical domain containing many small obstacles. The basic methodology and the main ingredients used in schemes are provided, together with some exact solutions that are used to benchmark the integral approach. The latter is compared to the reference solution that accounts for all obstacles through standard wall-boundary conditions. Numerical results are also shown to be more accurate than the standard well-balanced approach. This work is actually the sequel of paper [1] that investigates the computation of compressible flows in variable cross-section ducts.

Key words : Finite volumes / Integral approach / Flows in obstructed media / Well-balanced approach / Entropy

1 Introduction

The main purpose in this paper is to provide some way to investigate fluid evolutions in a physical domain containing many tiny obstacles. The basic underlying idea is indeed very simple. Actually, in a preliminary work [1], classical one-dimensional well-balanced (WB) formulations of fluid flows in pipes with varying cross sections have been investigated in detail, and compared with an integral unsteady formulation that allows the computation of compressible flows, whatever the cross section is

(even discontinuous, or with a closed flow path). The comparison included several situations, and both the classical well-balanced formulation and the integral formulation were confronted to a reference solution that was obtained by computing the multidimensional model on a very fine mesh, and the geometrical representation of all obstacles. It occurred that in all situations, the integral approach performs much better (when compared with the reference unsteady solution); in addition, the WB approach may crash when the ratio of neighbouring sections is too high. The work presented in this paper is in fact the sequel of this preliminary work.

When restricting to some specific communities, including at least the nuclear community ([4]), it must be first recalled that an entire generation of codes has been developed ([27, 31, 18]), that is grounded on the use of the so-called porous approach ([3, 7]). This one aimed at getting approximations of the main patterns of a single phase or two-phase flow in a physical domain where the fluid flows around many small obstacles. The basic idea was to use a set of PDE's that is commonly encountered when dealing with porous media. In that case, when neglecting viscous contributions, a toy model for compressible single phase flows is (see for instance [27]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vartheta(\mathbf{x}) \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vartheta(\mathbf{x}) \underline{Q}) = 0 \\ \frac{\partial \vartheta(\mathbf{x}) \underline{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vartheta(\mathbf{x}) \underline{Q} \otimes \underline{Q} / \rho) + \vartheta(\mathbf{x}) \nabla P = \vartheta(\mathbf{x}) \underline{S}_U \\ \frac{\partial \vartheta(\mathbf{x}) E}{\partial t} + \nabla \cdot (\vartheta(\mathbf{x}) \underline{Q} (E + P) / \rho) = \vartheta(\mathbf{x}) \underline{Q} \cdot \underline{S}_U / \rho + \vartheta(\mathbf{x}) S_E \end{array} \right. \quad (1)$$

where $\vartheta(\mathbf{x})$ stands for the ratio of the volume occupied by the fluid versus the total volume considered:

$$\vartheta(\mathbf{x}) = \text{vol}(\Omega^{fluid}) / \text{vol}(\Omega)$$

Source terms \underline{S}_U and S_E on the right hand side of (1) include gravity effects and regular head losses due to viscous contributions. Several schemes may be used in order to get approximate solutions of this set, when restricting to regular distributions for $\vartheta(\mathbf{x})$, for instance, those relying on the well-balanced scheme of J.M. Greenberg, L. Gosse and A.Y. Leroux introduced in the pioneering papers [19, 17] or other variants (see [16, 2, 26, 20, 25, 6] among many others). In addition, it was reported in [14] that the use of the WB approach is in fact mandatory when handling (1) with discontinuous cross sections; otherwise, some convergence towards some wrong solution may be obtained.

However, some situations exist where it becomes mandatory to handle sudden spatial variations for $\vartheta(\mathbf{x})$. This happens for instance when focusing on the flow below the core of the nuclear reactor, or when investigating the flow in steam generators. A typical situation corresponds to the fluid flow coming from a pure fluid zone and entering a domain obstructed with tiny aligned tubes. This case has been investigated some time ago in [15] for instance. It has been pointed out in this work

that the conditions that are enforced at the steady interface associated with the discontinuity in the porous profile, which correspond to the preservation of Riemann invariants of the steady wave, do not match the true behaviour of the fluid properties, as revealed by the multi-dimensional computations. More precisely, the mass flow rate $\vartheta Q \cdot \underline{n}$ and the energy flow rate $\vartheta Q \cdot \underline{n} H$ are indeed physical invariants, but the third Riemann invariant is actually not preserved. This in fact is almost obvious, and known from long ; it simply means that some **singular** head losses have been omitted in the basic formulation of the momentum balance, which in turn results in this mismatching.

Thus, a straightforward cure simply consists in recovering these singular head losses. This is precisely what has been achieved in the recent paper [1] within the framework of one-dimensional flows in pipes with varying cross sections. The main objective here is to build the counterpart of this approach in a multidimensional domain occupied by the fluid and many obstacles. As it will quickly occur, the idea is almost trivial.

Hence the paper is organised as follows. In section 2, we first present an integral approach in order to get approximate solutions of a compressible flow model, when the fluid evolves in a large domain obstructed by many small obstacles. The target model will be the Euler set of equations. In section 3, we will briefly detail the counterpart of Bernoulli formulas for compressible flows encountering a sudden contraction. Section 4 will give focus on some approximate/exact solutions of compressible fluids flowing in a free medium and then crossing a contraction. These test cases are highly representative of what may happen in industrial applications for nuclear power plant studies. Then, section 5 will give the main ingredients of the numerical algorithms involved ; those mainly rely on standard approximate Riemann solvers, but of course implicit numerical solvers that aim at coping with low-Mach number flows might be considered as well. We will present afterwards some numerical results in the last section. A comparison of results associated with:

1. the two-dimensional approximate solution obtained on a very fine grid, which will be referred to as the "reference" solution,
2. the integral two-dimensional approach proposed in the present paper,

will be achieved. Moreover, these two-dimensional results will be compared with those provided by the classical one-dimensional well-balanced approach associated with the simulation of solutions of (1) (see appendix B), and also with those pertaining to the one-dimensional integral approach of [1]. When available, the measure of the L^1 norm of the error will be provided. An appendix devoted to viscous effects completes the whole.

2 Basic formulation

2.1 Set of equations

We consider the compressible Navier-Stokes equations. As usual, the main unknowns ρ , \underline{u} , P respectively denote the density, the velocity, and the pressure of the fluid. The mean total energy E is such that :

$$E = \rho((\underline{u})^2/2 + \epsilon(P, \rho))$$

and the momentum is: $\underline{Q} = \rho \underline{u}$. The internal energy $\epsilon(P, \rho)$ must be prescribed by the user.

The speed of acoustic waves, which will be noted c , is such that:

$$c^2 = \left(\frac{P}{\rho^2} - \frac{\partial \epsilon(P, \rho)}{\partial \rho} \right) / \left(\frac{\partial \epsilon(P, \rho)}{\partial P} \right)$$

Thus the set of governing equations is:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{Q}) = 0 \\ \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{Q} \otimes \underline{Q} / \rho) + \nabla P = \nabla \cdot (\underline{\underline{\Sigma}}^v) \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{Q}(E + P) / \rho) = \nabla \cdot (\underline{\underline{\Sigma}}^v \underline{u}) \end{cases} \quad (2)$$

when neglecting Fourier heat flux contributions. We also note :

$$H = (E + P) / \rho$$

the total enthalpy, and $h = \epsilon + P / \rho$ is the specific internal enthalpy. The viscous stress tensor $\underline{\underline{\Sigma}}^v$ is briefly recalled though classical:

$$\underline{\underline{\Sigma}}^v = \mu (\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\underline{D}}) Id)$$

with:

$$\underline{\underline{D}} = (\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) / 2$$

thus assuming a minimum entropy dissipation.

Smooth solutions of (2) comply with the entropy inequality:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{E}_\eta) \leq 0$$

where $(\eta = \rho s, \underline{E}_\eta = \rho s \underline{u})$ denotes the entropy-entropy flux pair, and $s(P, \rho)$ complies with:

$$c^2(P, \rho) \frac{\partial s(P, \rho)}{\partial P} + \frac{\partial s(P, \rho)}{\partial \rho} = 0$$

Throughout the paper, W will be the conservative variable:

$$W = (\rho, \underline{Q}, E)^t$$

2.2 Integral form of conservation laws

We will now integrate the set of equations on a control volume Ω_i that may contain many obstacles. These obstacles may be completely included in it, or cross it totally or partially; of course part of the boundary of this control volume may coincide with the surface of an obstacle. A sketch of the different admissible situations is provided in figure 1.

In the following, the superscript ϕ_{ij} refers to interfaces ij separating two neighbouring control volumes Ω_i and Ω_j where the fluid may cross the ij interface. The corresponding surface is noted S_{ij}^ϕ .

On the contrary, superscripts w_i refer to interfaces where a wall boundary Γ_i^w is present (strictly) inside the control volume Ω_i or on the boundary of the control volume Ω_i . The corresponding surface is noted S_i^w . Obviously, the mass flux is null through the latter surface S_i^w .

Eventually, the volume occupied by the fluid within the control volume Ω_i is denoted Ω_i^ϕ .

Nonetheless, a "big" control volume Ω_i may contain several ($k \in 1, N(i)$) fluid sub-domains $\Omega_{i,k}^\phi$, that are not connected to each other; this is due to the fact that tiny obstacles may fully split Ω_i into smaller -non connected- control volumes. This happens when elements of type (3) are present within cell i (see figure (1)). Hence we need to introduce within each fluid sub-cell $\Omega_{i,k}^\phi$ a mean value of the fluid state variable $W(\mathbf{x}, t)$ noted $W_{i,k}(t)$:

$$W_{i,k}(t) = \left(\int_{\Omega_{i,k}^\phi} W(\mathbf{x}, t) dx \right) / \text{meas}(\Omega_{i,k}^\phi)$$

and we also introduce a natural definition for the mean fluid state variable in cell $W_i(t)$ as:

$$W_i(t) = \left(\int_{\Omega_i^\phi} W(\mathbf{x}, t) dx \right) / \text{meas}(\Omega_i^\phi)$$

while:

$$\Omega_i^\phi = \cup_{k \in 1, N(i)} \Omega_{i,k}^\phi$$

Thus:

$$W_i(t) = \left(\sum_{k \in 1, N(i)} \text{meas}(\Omega_{i,k}^\phi) W_{i,k}(t) \right) / \text{meas}(\Omega_i^\phi)$$

which guarantees a consistent formula for $W_i(t)$, since:

$$\text{meas}(\Omega_i^\phi) = \sum_{k \in 1, N(i)} \text{meas}(\Omega_{i,k}^\phi)$$

We may now consider the conservation law:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{F}(W)) = \nabla \cdot (\underline{F}^v(W, \nabla W))$$

and integrate over time interval $[t_1, t_2]$ and space with respect to $\Omega_{i,k}^\phi$; hence we get:

$$\int_{\Omega_{i,k}^\phi} (W(\mathbf{x}, t_2) - W(\mathbf{x}, t_1)) dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_{i,k}} \underline{F}(W(\mathbf{x}, t)) \cdot \underline{n} d\gamma = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_{i,k}} \underline{F}^v(W(\mathbf{x}, t), \nabla W(\mathbf{x}, t)) \cdot \underline{n} d\gamma$$

with $\underline{F}(W(\mathbf{x}, t))$ the convective flux and $\underline{F}^v(W(\mathbf{x}, t), \nabla W(\mathbf{x}, t))$ the diffusive flux. Here, $\Gamma_{i,k}$ denotes the whole boundary of the fluid sub-cell $\Omega_{i,k}^\phi$. We may also distinguish the fluid and the wall boundaries $\Gamma_{i,k}^\phi$ and $\Gamma_{i,k}^w$ of each sub-cell $\Omega_{i,k}^\phi$, such that:

$$\Gamma_{i,k} = \Gamma_{i,k}^\phi \cup \Gamma_{i,k}^w$$

We also have:

$$\underline{F}(W) \cdot \underline{n} = (\rho \underline{u} \cdot \underline{n}, (\rho \underline{u} \cdot \underline{n}) \underline{u} + P \underline{n}, (E + P) \underline{u} \cdot \underline{n})$$

Summing up over the $N(i)$ fluid sub-cells, we get at once:

$$\begin{aligned} meas(\Omega_i^\phi)(W_i(t_2) - W_i(t_1)) + \sum_{k \in 1, N(i)} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_{i,k}} \underline{F}(W(\mathbf{x}, t)) \cdot \underline{n} d\gamma \right) \\ = \sum_{k \in 1, N(i)} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_{i,k}} \underline{F}^v(W(\mathbf{x}, t), \nabla W(\mathbf{x}, t)) \cdot \underline{n} d\gamma \right) \end{aligned} \quad (3)$$

These formulas are actually an integral approach that will be used afterwards. We insist on the fact that in some particular situations, the counterpart of the control volume, which will be the Finite Volume cell, may contain obstacles of type (3) (see figure 1) such that mean values $W_{i,k}(t)$ are completely different from one another. This may happen for instance in tube bundles in the core of a nuclear reactor, or in steam generators. The first test case in section 6 will refer to this specific situation.

However, **in the sequel**, we will get rid of viscous contributions. Some way to account for these contributions is discussed in appendix A. We recall that one main goal here is to compare various formulations, including the true multi-dimensional approach, the integral approach, and the classical porous approach. Thus a more accurate way to achieve that amounts to consider the sole convective terms. Hence we will now focus on:

$$\begin{aligned} meas(\Omega_i^\phi)(W_i(t_2) - W_i(t_1)) + \sum_{k \in 1, N(i)} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_{i,k}^\phi} \underline{F}(W(\mathbf{x}, t)) \cdot \underline{n} d\gamma \right) \\ + \sum_{k \in 1, N(i)} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_{i,k}^w} \underline{F}(W(\mathbf{x}, t)) \cdot \underline{n} d\gamma \right) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

The integral formulation (4) simply represents - in spirit- the counterpart of the classical Finite Volume approach, using a double integration wrt time and space on some given -steady- control volumes. The main difference here with the usual FV approach is that the formulation is continuous (and not discrete), and also that the boundary of control volumes is no longer assumed to fit perfectly the wall boundaries arising with obstacles, as it happens in the classical “pure CFD“ FV approach.

Before going further on, we discuss in the following sections some approximate form of Bernoulli conditions, and also provide some exact and approximate solutions for two test cases.

3 An approximation of singular head losses encountered in sudden contractions

We focus here on the integral form of conservation laws around some **steady** state. The fluid is thus assumed to be flowing in a uniform pipe of section S^- and then entering a second pipe with a different section S^+ . We detail constraints associated with the left state $(\rho, U, P)^-$ and the right state $(\rho, U, P)^+$, denoting P^* (respectively P^{**}) the mean pressure acting on the wall boundary of surface $(S^- - S^+)$ when $S^- > S^+$ (respectively $(S^+ - S^-)$ when $S^- < S^+$).

Some straightforward calculations yield in the first case ($S^- > S^+$):

$$\begin{cases} [\rho U S]_-^+ = 0 \\ [(\rho U^2 + P) S]_-^+ + P^*(S^- - S^+) = 0 \\ [\rho U H S]_-^+ = 0 \end{cases} \quad (5)$$

A reasonable estimate for P^* is the wall value of the pressure associated with a symmetric Riemann problem, where the initial left state is $W_L = W^-$, while the initial right state is $W_R = \hat{W}_L$, if \hat{a} denotes the mirror state of a with respect to $\mathbf{n} = \mathbf{n}_x$; thus:

$$P^* = P^{Riemann}(W^-, \hat{W}^-, \mathbf{n} = \mathbf{n}_x)$$

Similar computations can be performed in the second case when $S^- < S^+$:

$$\begin{cases} [\rho U S]_-^+ = 0 \\ [(\rho U^2 + P) S]_-^+ - P^{**}(S^+ - S^-) = 0 \\ [\rho U H S]_-^+ = 0 \end{cases} \quad (6)$$

In that second case, the wall pressure P^{**} may be estimated as:

$$P^{**} = P^{Riemann}(\hat{W}^+, W^+, \mathbf{n} = -\mathbf{n}_x)$$

In the first case, the mass balance and the momentum balance enable to rewrite:

$$\begin{cases} (\rho S)^+[U]_-^+ + U^-[\rho S]_-^+ = 0 \\ \overline{\rho U S}[U]_-^+ + S^+[P]_-^+ + (P^- - P^*)[S]_-^+ = 0 \end{cases} \quad (7)$$

where:

$$\overline{\rho U S} = ((\rho U S)^+ + (\rho U S)^-)/2 = (\rho S)^+\overline{U} - \frac{U^-}{2}[\rho S]_-^+$$

Then, inserting the latter expression in the second equation of (7), and eliminating $[\rho S]_-^+$ from the first equation in (7), we get:

$$(\rho S)^+[U^2/2]_-^+ + (\rho S)^+([U]_-^+)^2/2 + S^+[P]_-^+ + (P^- - P^*)[S]_-^+ = 0$$

Now, if we restrict to a perfect gas EOS ($P = (\gamma - 1)\rho\epsilon(P, \rho)$), we can give the explicit form of P^* which is:

$$P^* = P^- \left(1 + f\left(\frac{U^-}{c^-}\right) \right)$$

with : $f(0) = 0$ and $f'(0) = \gamma$. For small enough values of the local Mach number $|\frac{U^-}{c^-}|$, we get an approximation $P^* = P^-$, thus:

$$[U^2/2]_-^+ + \frac{1}{\rho^+}[P]_-^+ = -\frac{1}{2}([U]_-^+)^2 < 0 \quad (8)$$

The exact form is in fact:

$$[U^2/2]_-^+ + \frac{1}{\rho^+}[P]_-^+ = -\frac{1}{2}([U]_-^+)^2 + \frac{P^-}{(\rho S)^+} f\left(\frac{U^-}{c^-}\right)[S]_-^+ \quad (9)$$

The second contribution on the right hand side will be negative (respectively positive) if the fluid at the left inlet is moving towards the right (resp. to the left), since in that case we have: $[S]_-^+ < 0$, and: $f(\frac{U^-}{c^-}) > 0$ (resp. $f(\frac{U^-}{c^-}) < 0$).

In the second case, where $[S]_-^+ > 0$, we rewrite mass and momentum balance as follows:

$$\begin{cases} (\rho S)^-[U]_-^+ + U^+[\rho S]_-^+ = 0 \\ \overline{\rho U S}[U]_-^+ + S^-[P]_-^+ + (P^+ - P^{**})[S]_-^+ = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Hence, since:

$$\overline{\rho U S} = (\rho S)^-\bar{U} + \frac{U^+}{2}[\rho S]_-^+$$

we eventually get:

$$(\rho S)^-[U^2/2]_-^+ - (\rho S)^-([U]_-^+)^2/2 + S^-[P]_-^+ + (P^+ - P^{**})[S]_-^+ = 0$$

or:

$$[U^2/2]_-^+ + \frac{1}{\rho^-}[P]_-^+ = \frac{1}{2}([U]_-^+)^2 + \frac{P^+}{(\rho S)^-} g\left(\frac{U^+}{c^+}\right)[S]_-^+ \quad (11)$$

with $g(y) = f(-y)$.

This extension (11) of the Bernoulli relations for discontinuous cross sections is obviously the counterpart of the previous case (9). The singular head losses actually increase when the fluid flows from the larger pipe to the pipe of smaller cross section. We emphasize that these results are valid in the framework of stiffened gas EOS or other more complex EOS. We also recall that specific and detailed formulations of head losses can be found in [24] for instance.

We eventually recall that the classical one-dimensional variable cross-section approach (or alternatively the standard porous approach) relies on the use of the set of governing equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho S u}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u^2}{\partial x} + S \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E S}{\partial t} + \frac{\partial u(E + P)S}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

and on the use of Riemann invariants of the steady wave across abrupt changes of section in order to connect states W^- and W^+ . Unless the flow is at rest, this results in the following three constraints:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\rho u S]_{-}^{+} = 0 \\ [u^2/2 + \epsilon(P, \rho) + \frac{P}{\rho}]_{-}^{+} = 0 \\ [\eta(P, \rho)/\rho]_{-}^{+} = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

or equivalently:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\rho u S]_{-}^{+} = 0 \\ [u^2/2 + \int^{\rho} (\frac{c^2(\rho, \eta)}{\rho} d\rho)]_{-}^{+} = 0 \\ [\eta(P, \rho)/\rho]_{-}^{+} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

Note that when restricting to perfect gas EOS, we retrieve the classical relation: $[\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1}]_{-}^{+} = 0$. Though different, these constraints (13) (or (14)) may be compared with (5) (or (6)).

Eventually we underline the fact that numerical approximations of solutions that have been investigated in references [14, 25] rely on exact solutions of the Riemann problem associated with conditions (13). Note also that most of current "true" well-balanced schemes in the literature have been designed using relations (13).

Actually, test B in section 4 will stand for the counterpart of this global balance of mass, momentum and energy that has been examined in section 3. The quantity P^* in equation (15), which represents the integral of pressure forces on vertical wall faces arising with obstacles aligned in the flow direction, will be computed with a two-dimensional CFD code. This will allow the derivation of outlet conditions on the right hand side (by finding X^{\pm} densities at the right exit, which are solutions of equation (16)) and will give some reference solution.

4 Two basic test cases

4.1 Test A

This first test case is indeed very simple. It simply consists in computing the flow of a fluid along aligned obstacles, in a two-dimensional framework. Obstacles are identical (these may represent tube bundles in a steam generator or in the core of a reactor in a nuclear power plant). A sketch of the test case is displayed on figure (2).

Since viscous effects are neglected, and due to the fact that all flows are separated by obstacles, we may examine the influence of the mesh refinement, and compute the error for all meshes. Within the area contained between two aligned tubes (for $m = 1$ to 3), the steady flow complies with:

$$\rho(x, y, t) = \rho_L^m \quad ; \quad U(x, y, t) = U_L^m \quad ; \quad V(x, y, t) = 0 \quad ; \quad P(x, y, t) = P_L^m$$

where ρ_L^m, U_L^m, P_L^m respectively denote values enforced on the left side corresponding with the inlet boundary. Values will be chosen different within each sub-channel in order to check the mesh dependency. Detailed values of constants (ρ_L^m, U_L^m, P_L^m) will be given in section 6.1.

4.2 Test B

We consider here the flow of a compressible fluid entering a domain including many aligned tubes. The flow is assumed to be steady, and we moreover impose that the mean flow direction at the inlet -on the left side- would be aligned with the symmetry axis of obstacles (see figure (8)).

Symmetry -or equivalently wall- conditions are enforced on the upper and lower part of the computational domain. A straightforward integration of mass, energy and x - momentum equations immediately provides:

$$\begin{cases} \rho_2 U_2 S_2 = \rho_1 U_1 S_1 = Q_1 \\ h(P_2, \rho_2) + U_2^2/2 = h(P_1, \rho_1) + U_1^2/2 = H_1 \\ (\rho_2 U_2^2 + P_2) S_2 - (\rho_1 U_1^2 + P_1) S_1 + P^*(S_1 - S_2) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Values $\rho_1, U_1, P_1, S_1, S_2$ are given and the unknown is (ρ_2, U_2, P_2) . We also assume an initial and relevant guess for P^* .

We consider the main unknown $X = \rho_2$, we may achieve some basic calculations and get that X is solution of the scalar equation:

$$g(X) = H_1 \quad (16)$$

where:

$$g(X) = h(P_1 - (Q_1/S_2)^2/X, X) + \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{X S_2} \right)^2 \quad (17)$$

setting:

$$\mathcal{P}_1 = ((\rho_1 U_1^2 + P_1)S_1/S_2 + P^*(1 - S_1/S_2)) \quad (18)$$

If we assume a perfect gas state law:

$$P = (\gamma - 1)\rho\epsilon$$

then : $h(P, \rho) = \frac{\gamma P}{(\gamma-1)\rho}$, and we may set: $\beta = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$. Hence X must be solution of :

$$H_1 X^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \mathcal{P}_1 X + \frac{\beta Q_1^2}{2S_2^2} = 0$$

When solutions X^+, X^- are real, both are positive since $H_1 > 0$ and $\mathcal{P}_1 > 0$. Eventually, we get the velocity U_2

$$U_2 = Q_1/(S_2 X)$$

and:

$$P_2 = \mathcal{P}_1 - (\frac{Q_1}{S_2})^2/X$$

These solutions will be used in section 6.2. Note that the value P^* will be computed using numerical approximations of the solution in the multi-D case on a very fine mesh.

Once more, we emphasize that this solution may be used whatever the EOS is, using relations (16), (17), (18) ; of course expressions that have been detailed afterwards should be modified consequently.

5 Numerical schemes

The numerical algorithm that has been used to get approximations of solutions of system (4) is described below. It is assumed that all numerical fluxes may be evaluated by means of standard Finite volume techniques, considering one mean value W_i^n per cell Ω_i at each time t^n . This is obviously questionable, especially when some tiny obstacles split the cell Ω_i into several subcells which are not connected (element 3 in figure (1)). By the way this is one of the reasons that motivated the investigation of test case A. Actually, in this particular case where sub-channels are fully decoupled, the mean value over a control volume overlapping a tube may lead to unrealistic values of the mean state variable. This will be discussed in section 6.1.

Hence we assume that W_i^n is an approximation of $W_i(t^n)$, and denote as usual the time step: $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$. Moreover, we focus in this paper on **explicit** formulations. We define the following scheme:

$$\begin{aligned} meas(\Omega_i^\phi)(W_i^{n+1} - W_i^n) + \Delta t^n \sum_{k=1, N(i)} \left(\sum_{(j,k') \in V(i,k)} (\mathcal{F}_n^h)_{\Gamma_{i,k/j,k'}^\phi} S_{\Gamma_{i,k/j,k'}^\phi} \right) \\ + \Delta t^n \sum_{k=1, N(i)} \left(\sum_{\Gamma_{i,k}^w} \left(0, \left(\int_{\Gamma_{i,k}^w} P \underline{n} d\gamma \right)^h, 0 \right)^t \right) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

since $(\underline{u}, \underline{n}) = 0$ on the wall boundaries. $V(i, k)$ refers to sub-cells $\Omega_{j,k'}^\phi$ that are connected to sub-cell $\Omega_{i,k}^\phi$ through a fluid-fluid interface $\Gamma_{i,k/j,k'}^\phi$. It thus remains to define fluid-fluid and wall boundary numerical fluxes \mathcal{F}_n^h and $(\int_{\Gamma_{i,k}^w} P \underline{n} d\gamma)^h$ respectively.

1. Numerical fluxes at fluid-fluid interfaces are chosen in the classical literature. In practice here, all simulations considered in this paper rely on the approximate Godunov scheme VFRoe-ncv using symetrizing variables $Z^t = (s, \underline{u}, P)$, that was introduced in [13]. Hence, setting:

$$\mathcal{F}_n(W, \underline{n}) = ((Q, \underline{n}), (Q, \underline{n}) \underline{u} + P \underline{n}, (Q, \underline{n}) H)^t$$

\mathcal{F}_n^h will simply refer to:

$$\mathcal{F}_n^h = \mathcal{F}_n \left(W_{i,k/j,k'}^*, \underline{n}_{i,k/j,k'} \right) \quad (20)$$

where the unit normal $\underline{n}_{i,k/j,k'}$ points out from sub-cell $\Omega_{i,k}^\phi$ towards sub-cell $\Omega_{j,k'}^\phi$, and where the interface state $W_{i,k/j,k'}^*$ is computed by solving exactly the linear Riemann problem associated with:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s}{\partial t} + \hat{u}_n \frac{\partial s}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} + \hat{u}_n \frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial P}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \hat{u}_n \frac{\partial P}{\partial n} + \hat{\rho} \hat{c}^2 \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial u_\tau}{\partial t} + \hat{u}_n \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

where $u_n = \underline{u} \cdot \underline{n}$, $\underline{n} \cdot \underline{\tau} = 0$, $\underline{\tau} \cdot \underline{\tau} = 1$ and $u_\tau = \underline{u} \cdot \underline{\tau}$, and also defining an average $\hat{\psi}$ for any variable ψ as:

$$\hat{\psi} = (\psi_L + \psi_R)/2$$

if subscripts L, R refer to the left and right mean values of the state variable ψ apart from interface L/R .

System (21) represents the two-dimensional system of Euler equations, rewritten in non conservative variables, assuming smooth enough solutions ; using invariance under rotation, one may rewrite equations in the local frame $(\underline{n}, \underline{\tau})$ instead of $(\underline{i}, \underline{j})$, and then neglect transverse derivatives (hence along the $\underline{\tau}$ -direction). It is used in order to predict intermediate states in the linearized Riemann problem (in the n -direction), and thus it should not be confused with the non viscous part of system (2), which has the correct conservative form, and thus allows the computation of physically relevant shock solutions. We emphasize that this conservative form (2) is the one that is used for the integral formulation (4).

The exact solution of the 1D Riemann problem associated with (21) and initial conditions Z_L, Z_R on the cell interface L/R is noted $Z_{i,k/j,k'}^*$, and thus we get:

$$W_{i,k/j,k'}^* = W(Z_{i,k/j,k'}^*)$$

This completes the definition of fluid-fluid numerical fluxes.

2. We turn now to the wall boundary fluxes. We assume discrete fluxes:

$$\left(\mathcal{P}^h \underline{n} \right)_{i,k}^w S_{i,k}^{\Gamma^w} = P(W_{i,k}) \underline{n}_{i,k}^w S_{i,k}^{\Gamma^w} \quad (22)$$

to be consistent approximations of $\int_{\Gamma_{i,k}^w} P \underline{n} d\gamma$.

Obviously, this implies that all impinging effects or suction effects are neglected within the fluid sub-cell $\Omega_{i,k}^\phi$. Moreover, a straightforward consequence of this approximation is that contributions on inner elements of type (4) as defined

in figure (1) are null, since:

$$\left(\int_{\Gamma_{i,k}^{w,4}} P \underline{n} d\gamma \right)^h = P(W_{i,k}) \int_{\Gamma_{i,k}^{w,4}} \underline{n} d\gamma = \underline{0}$$

More sophisticated approximations might be considered, for instance those grounded on the exact solution of the 1D Riemann problem on wall boundaries.

The scheme (19) is now fully defined, considering (20) and (22). Actually, many cells in the computational domain will contain a sole fluid sub-cell; in that case the scheme (19) is equivalent to:

$$meas(\Omega_i^\phi)(W_i^{n+1} - W_i^n) + \Delta t^n \sum_{(j,k') \in V(i)} \left(\mathcal{F}_n^h \right)_{\Gamma_{i/j,k'}^\phi} S_{\Gamma_{i/j,k'}^\phi} + \Delta t^n \sum_{\Gamma_i^w} \left(0, \mathcal{P}^h \underline{n}, 0 \right)_i^t S_{\Gamma_i^w} = 0$$

which identifies with the classical Finite Volume formulation for full fluid cells, where:

$$\Omega_i^\phi = \Omega_i$$

In the following, the time step Δt^n will be chosen in agreement with the classical CFL condition arising with the fluid-fluid interface fluxes. We also emphasize that inlet and outlet boundary conditions are classical (see [8]) since these boundaries are fluid-fluid interfaces. We now focus on some numerical results associated with the two test cases introduced in section 3.

6 Numerical results

In this section, we will provide numerical results obtained with four different approaches and schemes. These four schemes are:

- the "2D+" scheme which refers to the integral approach detailed in this paper and applied on non adapted meshes;
- the "2D" scheme corresponding to the pure fluid approach, thus using adapted meshes that do not overlap or intersect obstacles;
- the "WBR" scheme which corresponds to the classical one-dimensional well-balanced approach on variable cross-section ducts using the Kröner-Thanh scheme [26] to approximate interface fluxes;
- the "1D+" scheme referring to the almost one-dimensional approach with one row of coarse two-dimensional cells for the simulation of flows in ducts with variable cross-sections (see [1] for details).

Moreover, for the second test case (test B), a comparison with the analytical solution of the density X^\pm detailed in section 4.2 will be added, using a normalization ϕ^\pm/ϕ_L , where ϕ either denotes the density, the velocity, the pressure or the entropy.

6.1 Test case A

The two-dimensional computational domain is $\Omega = [0, 5] \times [0, 1]$. We consider regular and rectangular meshes, with faces aligned with the obstacles. The ratio of the fluid section in the x-direction over the total cross section is equal to 0.6.

Densities, x-velocities and pressures at the inlet sections of the upper, middle and lower channels are respectively ($x_L = 0$):

$$\begin{aligned}\rho_{up}(x_L, y, t) &= 3. \quad ; \quad U_{up}(x_L, y, t) = 300. \quad ; \quad P_{up}(x_L, y, t) = 3.10^4, \\ \rho_{mid}(x_L, y, t) &= 2. \quad ; \quad U_{mid}(x_L, y, t) = 200. \quad ; \quad P_{mid}(x_L, y, t) = 2.10^4, \\ \rho_{low}(x_L, y, t) &= 5. \quad ; \quad U_{low}(x_L, y, t) = 500. \quad ; \quad P_{low}(x_L, y, t) = 5.10^4,\end{aligned}$$

A perfect gas state law is used:

$$p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$$

with $\gamma = 7/5$. We enforce these inlet boundary conditions and compute a steady state. Thus the true solution is simply a constant solution within each channel, which corresponds with the inlet solution. We only consider four distinct meshes in this paper and refer to [28] for further details and other mesh configurations. The initial values are chosen uniform and equal to:

$$\rho(., t = 0) = 1., \quad U(., t = 0) = 0., \quad V(., t = 0) = 0., \quad P(., t = 0) = 10^4$$

Wall boundary conditions are imposed at the top ($y = 1.$) and at the bottom ($y = 0.$) of the computational domain. The outlet fluxes at the right boundary interfaces ($x = 5.$) are calculated with the VFRoe-ncv scheme considering that the external state is equal to the internal state (which is equivalent to some full upwind approximation).

The first mesh is really coarse since it contains only 2 cells in the y-direction and 15 cells in the mean flow direction. The main "advantage" is that tubes are totally contained within the cells, which means that elements of type (3) (in the sense introduced in figure 1) are present here. The porosity ϑ is uniform and equal to 0.6 (as it will happen with the second mesh below). Thus fluxes on the left vertical inlet involve two distinct contributions : W_{up} and W_{mid} for the upper cell, and W_{mid} and W_{low} for the lower cell. When focusing on the steady state arising with this particular mesh, it occurs that transverse fluxes in the y-direction modify the structure of the expected steady solution. This was expected and is due to the connection of cells in the y-direction through fluid/fluid interfaces that involve mean cell values that are averages of states W_{up} , W_{mid} and W_{low} , which does not make sense at all. It obviously implies that coarse meshes should not overlap regions which are physically non-connected. Then, for each variable $\varphi = (\rho, U, V, P)$, the L^1 norm of the error is defined by :

$$e_{L^1}(\varphi; t^n) = \frac{\sum_{i \in \{1, N_{cells}\}} \left| \varphi_i^n - \varphi_i^{analytical} \right| vol(\Omega_i)}{\sum_{i \in \{1, N_{cells}\}} \left| \varphi_i^{analytical} \right| vol(\Omega_i)}$$

The L^1 norm of the error is of order unity with mesh 1, whatever the variable is.

The second mesh contains only three cells in the transverse y-direction, and 15 cells in the x-direction. This means that the two obstacles no longer split any cell into two fluid subcells that are not connected. The ratio ϑ is still equal to 0.6 everywhere in the computational domain. Steady results are displayed in figure 3, 4, 5, 6, and include the porosity, the Mach number, the x-velocity component, the density and the pressure. The error distribution is also provided for density, pressure and velocity components. It is obviously close to 10^{-12} , or even smaller, almost everywhere.

The third mesh is made of 5×15 cells. Two points that should be noted here are that: (i) some cells are pure solid cells ($\vartheta = 0$) ; (ii) the second row of cells in the y-direction does not perfectly fit the lower wall boundary of the lower tube, since an error has been added on purpose, in order to check the robustness of the code. Thus this mesh is interesting, since it contains pure fluid cells ($\vartheta = 1$), pure solid cells ($\vartheta = 0$), and a second row of cells with very weak porosities ($\vartheta = 10^{-5}/3$). Eventually, a three finer meshes with 6×30 , 12×60 and 14×60 regular cells enable to check that the error computed by the code is still close to round-off errors. All results can be found in [28].

The L^1 norm of the error around the steady state has been plotted on figure 7 for all meshes, except for the first one (see the discussion above). We can notice that

the norm of the error is close to round-off errors, which explains the small increase of the L^1 norm when comparing the second (3×15) and the third mesh (5×15).

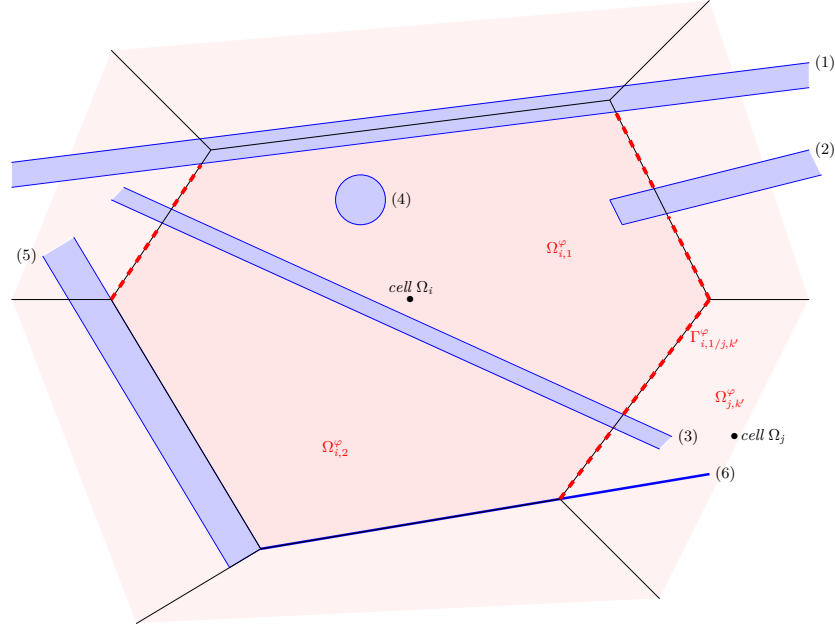


Figure 1: A (pink) control volume Ω_i includes (blue) obstacles numbered from 1 to 5. Obstacles may: be aligned with part of the boundary of cell i (element 5); partially occupy one fluid cell (or subcell) (element 2); fully cross cell i and split it into two fluid sub-cells $\Omega_{i,1}^\phi$ and $\Omega_{i,2}^\phi$ (element 3); be totally included in cell i or one of its subcells (element 4); overlap part of the boundary of cell i (element 1). The dashed red surface corresponds to the fluid-fluid part of the boundary $\Gamma_{i,k}^\phi$ between sub-cells $\Omega_{i,k}$ and their neighbouring sub-cells occupied by the fluid.

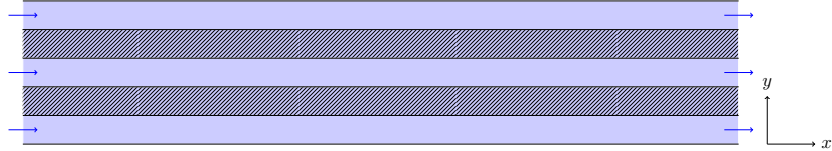


Figure 2: Sketch of test case A. The fluid flows from the three left inlets towards the right. Two identical tubes separate the three sub-channels. Inlet values of the density, velocity and pressure within each sub-channel are given in section 6.1.

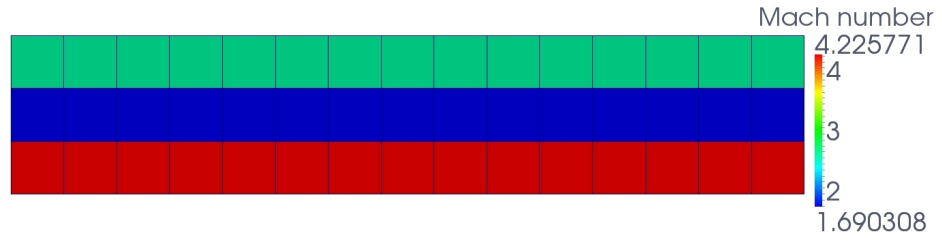


Figure 3: Test case A. Mach number distribution for mesh 2 including 15×3 cells.

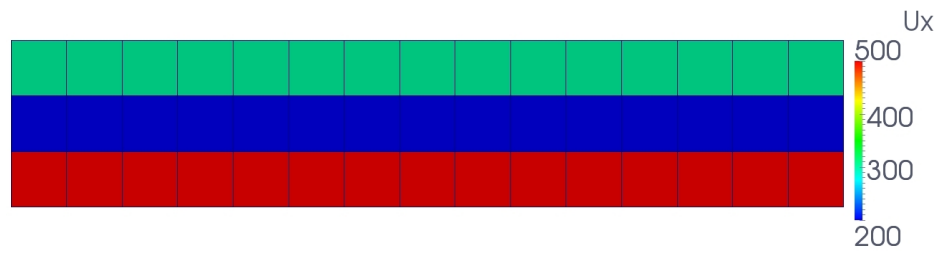


Figure 4: Test case A. Axial velocity distribution for mesh 2 including 15×3 cells.

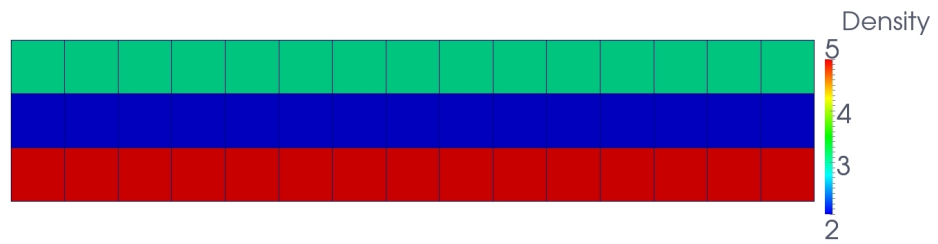


Figure 5: Test case A. Density distribution for mesh 2 including 15×3 cells.

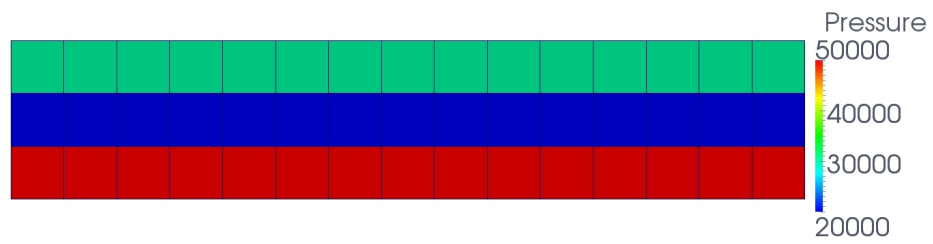


Figure 6: Test case A. Pressure distribution for mesh 2 including 15×3 cells.

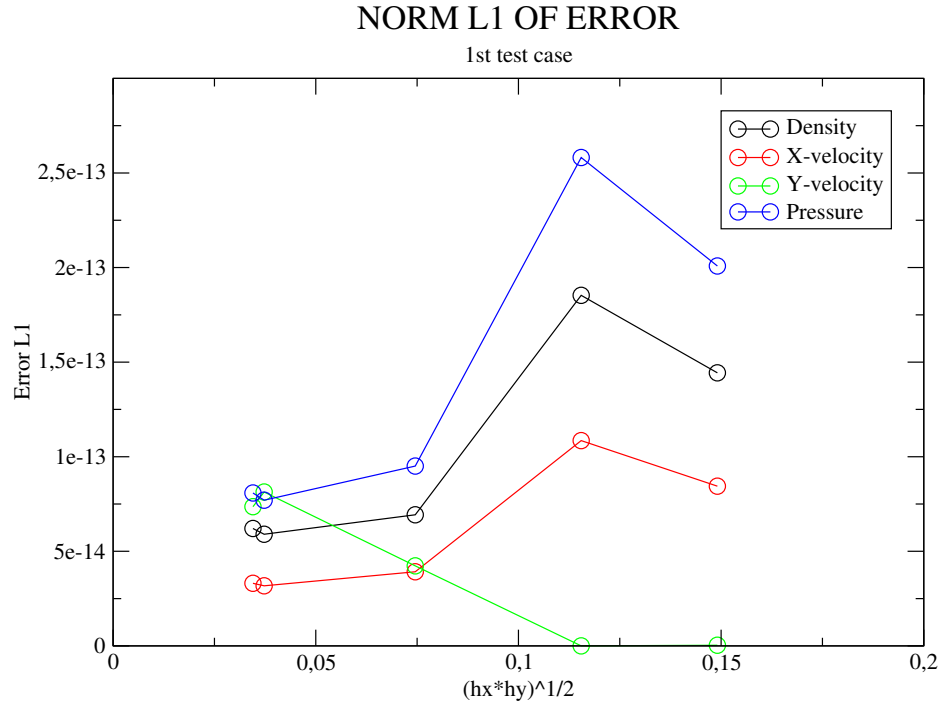


Figure 7: Test case A. L^1 norm of the error versus mesh size h , for the density, velocity and pressure variables. The meshes, from the coarsest (on the right) to the finest (on the left), contain 15×3 , 15×5 , 30×6 , 60×12 , and 60×14 cells.

6.2 Test case B

The experiment is somewhat different now, and close to what may happen in practice in some key regions in the coolant circuit in a pressurized water reactor. The inflow of the fluid from the left encounters some region uniformly occupied by two smooth rectangular and aligned tubes. This situation must also be compared with the analytic solution introduced in section 4. Thus the main goal here is to compare:

- the reference solution obtained on the whole computational domain with a reference code solving the Euler equations on a very fine mesh where all wall boundaries are meshed;
- solutions obtained with the integral approach, considering various mesh refinements.

These approximations will also be compared with the exact solution provided in section 4, (using the P^* values obtained from the reference solution), and with the one-dimensional integral approach $1D+$ introduced in [1].

The two-dimensional computational domain is now $\Omega = [-15, 5] \times [0, 1]$. The region containing the tubes starts at $x = 2.5$. Computational results will be displayed in the region $[0, 5] \times [0, 1]$. Once again, we use regular rectangular meshes; this enables to fit exactly the wall tube boundaries if necessary. The initial values are chosen uniform and equal to:

$$\rho(., t = 0) = 1., \quad U(., t = 0) = 0., \quad V(., t = 0) = 0., \quad P(., t = 0) = 10^4$$

Symmetry conditions are enforced at the lower and upper parts of the computational domain (respectively for $y = 0.$ and $y = 1.$). Once again, the outlet fluxes at the right boundary interfaces ($x = 5.$) are calculated with the VFRoe-ncv scheme considering the external state equal to the internal state (thus with a full upwind - or "supersonic" - treatment). The left boundary conditions are:

$$\rho(x_L, y, t) = 5. \quad ; \quad U(x_L, y, t) = 500. \quad ; \quad V(x_L, y, t) = 0. \quad ; \quad P(x_L, y, t) = 5. \times 10^4$$

with $x_L = -15$. Computational results are described around the steady state.

The first mesh includes 15×3 cells in the region $[0, 5] \times [0, 1]$. Around the steady state, we plot the cell porosity, Mach number, the x -velocity, the density and the pressure on figures 9, 10, 11, 12, 13. We note that the porosity profile is uniform on this coarse mesh in the y -direction. As a consequence, the flow seems to behave as a pure one-dimensional flow, thus y -components of the velocity are close to zero up to round-off errors. The local time residuals which measure the effective steadiness of the flow are smaller than 3.10^{-4} and 3.10^{-3} for the x -velocity and the pressure respectively. Then we turn to the second mesh that involves 16×5 cells in the same domain ; in that case, the mesh perfectly fits the physical wall boundaries, and the porosity is either 1 or null (see figure 14). Similar results for the Mach number and variables U_x, ρ, P are displayed in figures 15, 16, 17, 18. Local time residuals are

higher in that case, due to the occurrence of transverse velocities (see figure 19).

The following mesh (mesh 3) is intended to check the stability of the integral approach with respect to the wall boundary fitting. Thus mesh 3 is almost identical to mesh 2, except for the fact that the first -lower- row of cells in the x -direction has been slightly moved and their top interfaces are now located at $y = 0.2 + 10^{-5}$ (instead of $y = 0.2$ for the previous mesh). We note that the y -velocity profile is still close to a pure symmetric case (see figure 20); besides, the mean pressure profile (see figure 21) is indeed close to the previous one.

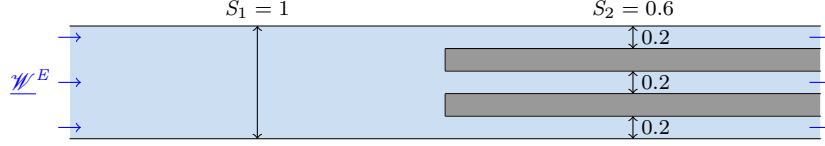


Figure 8: Sketch of test case B. The fluid flows from the left inlet towards the right outlet. On the right hand side, two identical tubes are aligned in the x-direction. The ratio of the right/left flow sections is: $S_R/S_L = 3/5$. Inlet values of the density, velocity and pressure are given in section 6.2.

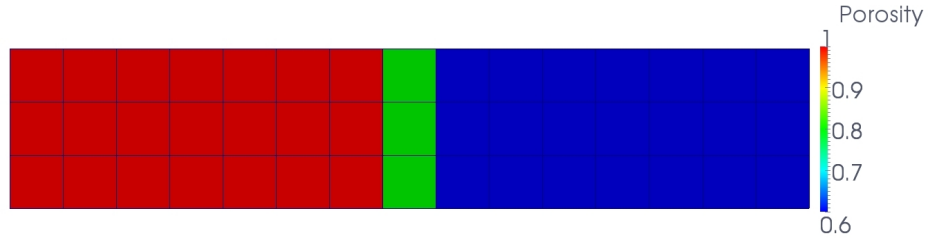


Figure 9: Test case B. Porosity distribution for mesh 1 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

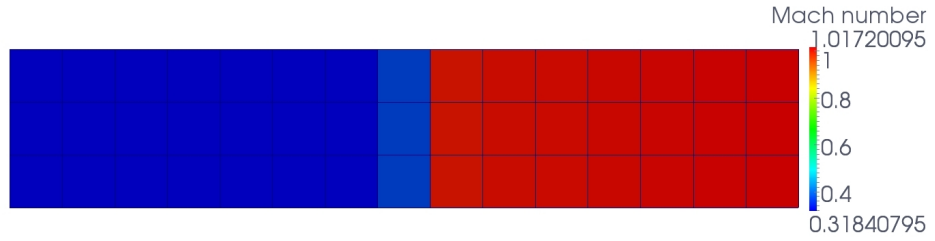


Figure 10: Test case B. Mach number distribution around the steady state for mesh 1 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

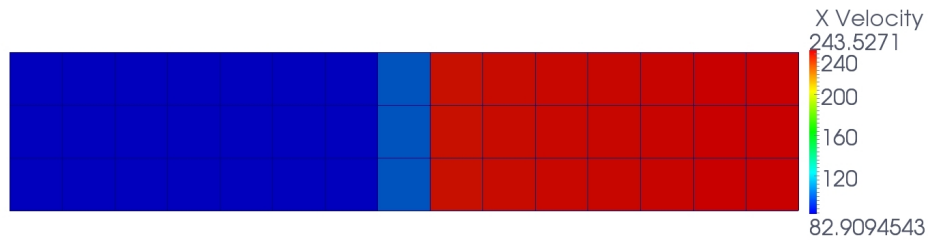


Figure 11: Test case B. Axial velocity distribution around the steady state for mesh 1 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

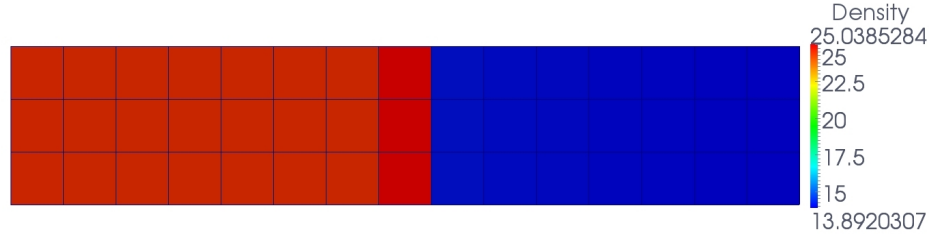


Figure 12: Test case B. Density distribution around the steady state for mesh 1 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

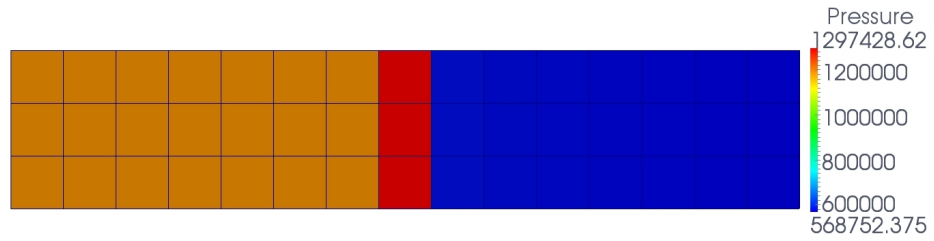


Figure 13: Test case B. Pressure distribution around the steady state for mesh 1 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

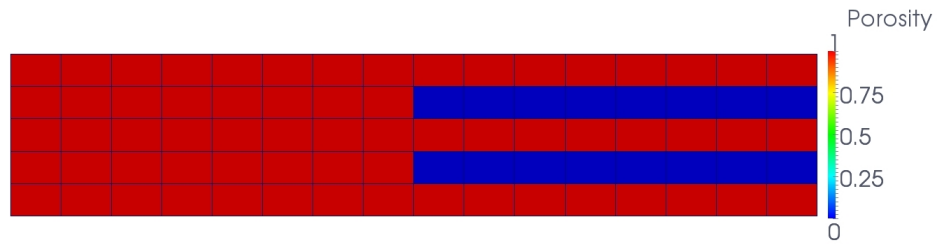


Figure 14: Test case B. Porosity distribution for mesh 2 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

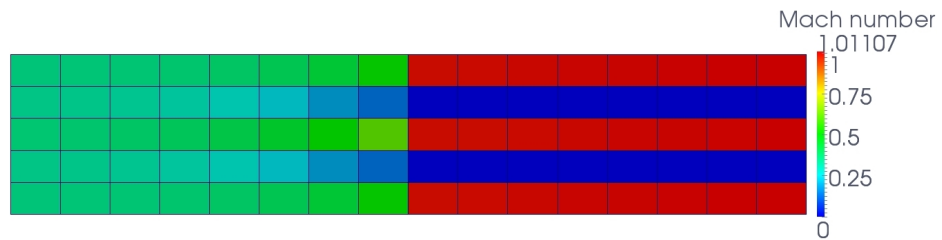


Figure 15: Test case B. Mach number distribution around the steady state for mesh 2 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

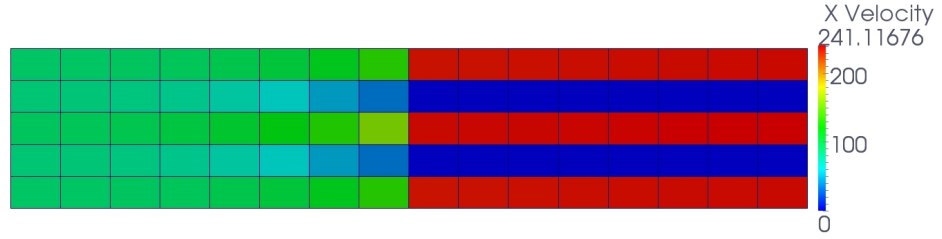


Figure 16: Test case B. Axial velocity distribution around the steady state for mesh 2 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

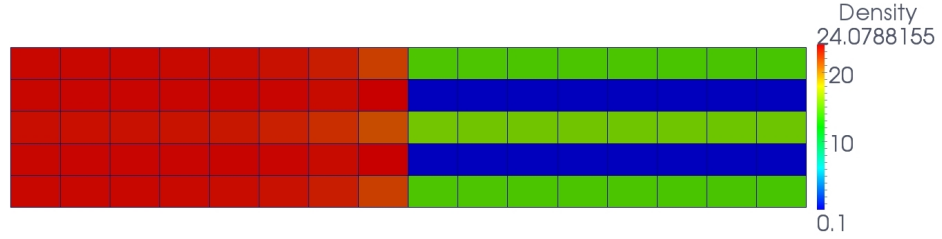


Figure 17: Test case B. Density distribution around the steady state for mesh 2 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

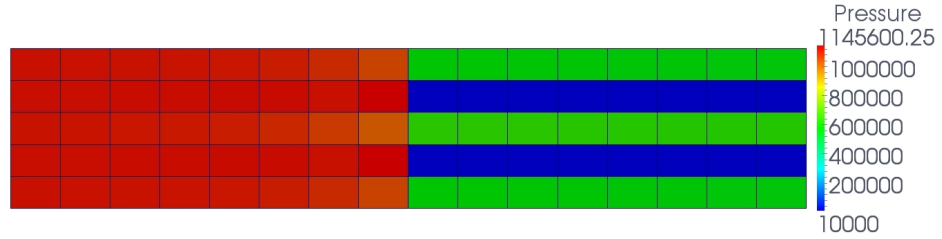


Figure 18: Test case B. Pressure distribution around the steady state for mesh 2 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

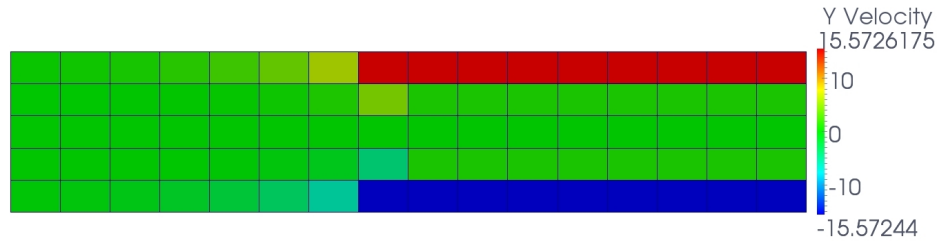


Figure 19: Test case B. Transverse velocity distribution around the steady state for mesh 2 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

The last two meshes are rather fine and contain 375×126 cells and 640×200 cells respectively, still restricting to the region of interest $[0, 5] \times [0, 1]$. The latter mesh again perfectly fits the wall boundaries, thus the porosity is either 1 or zero, whereas there are some "boundary layers" close the wall boundaries of tubes (where $\vartheta(\mathbf{x})$ lies in $]0, 1[$) when focusing on the fourth mesh with 126 cells in the y -direction. Density profiles may be compared for the two steady computations (see figures 22 and 23), together with pressure profiles (see figures 24 and 25), and transverse velocity profiles (see figures 26 and 27). The local time residual for the pressure variable is less than 8.10^{-4} for mesh 4 and less than 1.10^{-4} for mesh 5.

Eventually, we may compare results obtained with:

- (i) the "2D+" integral approach (as a function of the mesh size),
- (ii) the analytic solution of section 4.2 that relies on the computation of the densities X^\pm solutions of equations (16), (17) and (18);
- (iii) results of the 1D+ integral approach of [1] (with respect to the mesh size),

with those corresponding to the reference solution (2D approach with only pure fluid cells and wall boundaries).

The reader is referred to figures 28, 29, 30, 31 for that purpose, when focusing on the density, the velocity, the pressure and the entropy respectively.

Obviously, the predicted approximations provided by the well-balanced classical approach (*WBR*, with $\vartheta = 3/5$), which is based on classical interface conditions, is rather poor, when compared with the 2D+ approach. This is true for all variables including of course the entropy (see the last figure 31). The 1D+ scheme performs much better than the *WBR* approach, as already mentionned in [1], but it remains rather far from results of the 2D+ approach. This was actually expected here, since the fluid flow indeed contains two-dimensional patterns. Eventually, it may be checked that the 2D and 2D+ approaches almost coincide when the mesh is refined.

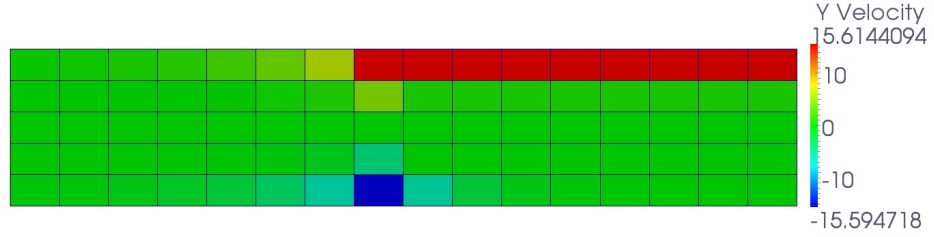


Figure 20: Test case B. Transverse velocity distribution around the steady state for mesh 3 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

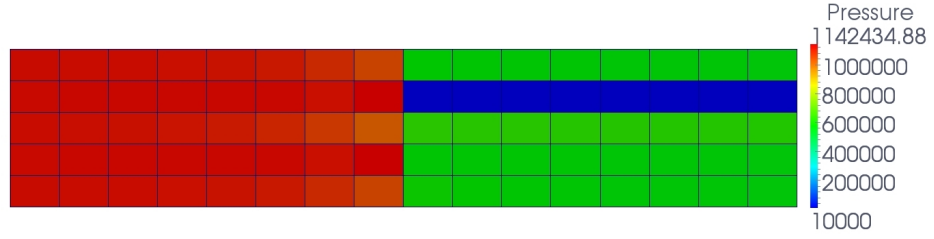


Figure 21: Test case B. Pressure distribution around the steady state for mesh 3 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

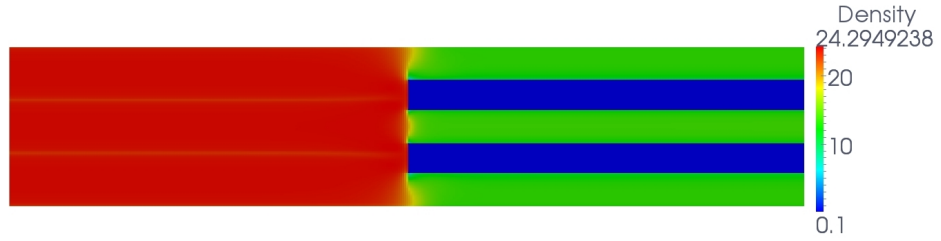


Figure 22: Test case B. Density distribution around the steady state for mesh 4 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

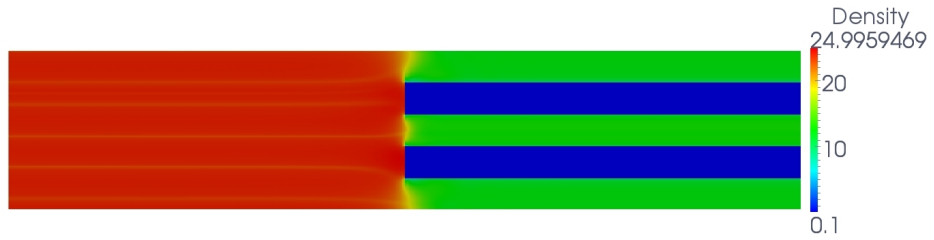


Figure 23: Test case B. Density distribution around the steady state for mesh 5 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

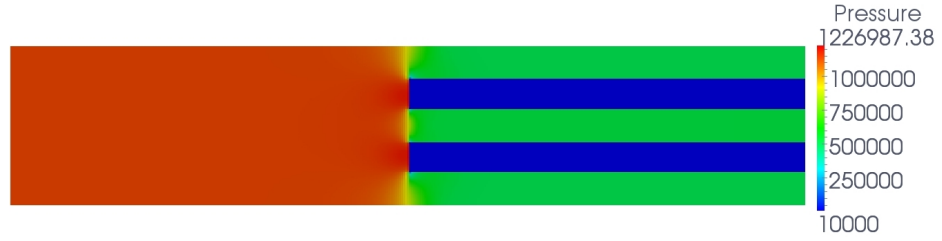


Figure 24: Test case B. Pressure distribution around the steady state for mesh 4 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

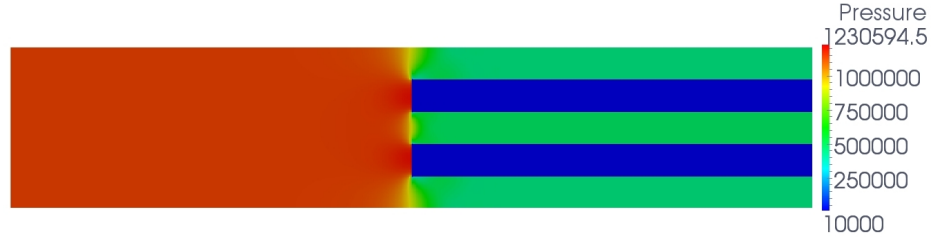


Figure 25: Test case B. Pressure distribution around the steady state for mesh 5 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

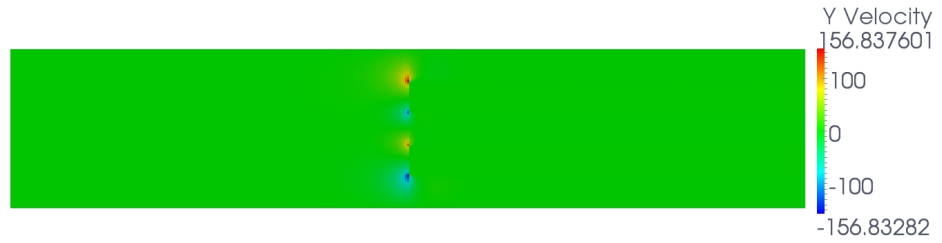


Figure 26: Test case B. Pressure distribution around the steady state for mesh 4 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

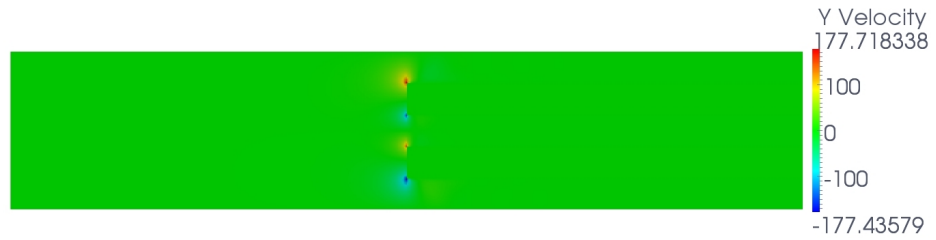


Figure 27: Test case B. Pressure distribution around the steady state for mesh 5 in region $[0, 5] \times [0, 1]$.

7 Conclusion

We presented in this paper an integral approach in order to predict flow patterns of a fluid flowing in a physical domain obstructed by many small obstacles. The basic methodology has been given and discussed, and the main motivations for that work have also been recalled. Numerical results seem to confirm that the basic ideas initially introduced in [1] in a one-dimensional framework are indeed useful and relevant. Numerical simulations obtained with the integral approach have been compared with the "reference" solution that arises when computing the fluid model in the entire fluid domain, while taking all obstacles into account through wall boundary conditions. Results of this comparison are actually quite satisfactory, even when the mesh size is rather coarse, which is of prime interest for nowadays practical computations for nuclear applications. The second essential point to be emphasized is that, by construction, approximate solutions provided by the integral approach naturally converge towards those of the "reference" solution, which is mandatory for nuclear safety reasons. Of course, one cannot afford fine enough meshes for true applications with current computers, and this renders the integral approach really appealing.

Numerical simulations have been run with the help of approximate Riemann solvers at fluid/fluid interfaces. Obviously, the counterpart is straightforward when applying implicit solvers for low-Mach number applications; this further work will be detailed in [28]. Of course, other conservative models may be used in the present integral approach, for instance three or four-equation two-phase flow models. A similar approach may also be used for some non-conservative two-fluid models, such as the one introduced in [21].

Eventually, we also underline that an attempt to use the new connections at steady interfaces, in order to improve the current well-balanced approach, is investigated in a companion work ([22]).

Acknowledgements

Xavier Martin benefits from financial support through an EDF-CIFRE contract 2012/0838. This work has been achieved within the framework of the TITANS2 project. All computational facilities were provided by EDF. Authors thank Bruno Audebert, Martin Ferrand and Erwan Lecoupanec for their help with *Code_Saturne* (see [5]) and for many fruitful discussions. Olivier Hurisse is also acknowledged for his careful reading of the manuscript.

8 Appendix A

This appendix briefly discusses some possible algorithms for the discretization of viscous stress tensors in the integral formulation. Actually, the scheme should provide some approximation of :

$$\int_{\Gamma_{i,k}} \underline{F}^v(W(\mathbf{x}, t), \nabla W(\mathbf{x}, t)) \underline{n} d\gamma$$

on a given control volume Ω_i including obstacles, parts of obstacles, fluid/fluid boundaries and wall boundaries.

The underlying idea simply consists in using standard schemes that enable to account for viscous effects. We refer for that purpose to the basic references [9, 11, 23, 12, 10] and to references therein. We emphasize that the review papers [23, 12] include numerous investigations of approximate solutions of:

$$-\nabla (\underline{K} \nabla \phi) = f$$

(with given Neumann or Dirichlet boundary conditions) when focusing either of Finite Volume schemes, Finite Element schemes, Discontinuous Galerkin schemes, Discrete Duality FV schemes and some others (nonlinear schemes, LB schemes, ...). The tensor \underline{K} is assumed to be positive symmetric definite; it may be anisotropic and inhomogeneous, depending on the test cases. Sources terms f arise in some test cases. The two reviews include a thorough comparison of the computational efficiencies, and a measurement of L^2 and L^∞ errors for more than ten distinct cases in a 2D or a 3D framework, with different -possibly non-conforming- types of meshes. For more details on specific schemes, the reader may also consider companion papers in the above mentioned FVCA5 and FVCA6 proceedings.

1. For wall boundaries, we assume attachment so that :

$$\underline{u}_{\Gamma_{i,k}^w} = \underline{0}$$

Hence some rough way to account for viscous effects consists in using a two-point flux approximation, considering a given state \underline{u}_i^n in cell Ω_i at time t^n .

2. If we turn to fluid/fluid interfaces $\Gamma_{i,k/j,k'}^\phi$ separating sub-cells $\Omega_{i,k}^\phi$ and $\Omega_{j,k'}^\phi$, we apply the same strategy, and use a two-point flux approximation for cartesian grids, or SUSHI type schemes for non cartesian grids. We refer to [11] for details.

Of course, implicit schemes should be used in order to get rid of unaffordable time step constraints.

It should be noted that the present strategy enables to handle huge mesh refinements, and thus to converge to the solution of "non-homogeneized" basic solutions of the Navier-Stokes equations when the mesh parameters h and Δt tend to zero.

9 Appendix B

For Euler equations, the classical well-balanced approach assumes that a correct approximation of the main physical patterns will be caught using the one-dimensional system :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho S(x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S(x)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u S(x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 S(x)}{\partial x} + S(x) \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E S(x)}{\partial t} + \frac{\partial u(E + P) S(x)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

where $S(x)$ denotes the -steady- transverse section in a pipe, assuming that the x -axis is aligned with the main direction of the flow in the pipe. System (23) is established by a straightforward integration on big control volumes, assuming in practice that the section $S(x)$ is at least C^1 . The well-balanced approach consists in adding first an obvious equation $\frac{\partial S(x)}{\partial t} = 0$; then two -left and right- fluxes F^\pm are computed on each cell interface, (here the second component $F^+ \neq F^-$ when focusing on the momentum equation), assuming a uniform section $S(x)$ within each cell -thus with a jump on each cell interface-, together with uniform physical states ρ, U, P within each cell, as usual. Thus the Riemann problem that has to be solved at each cell interface at each time step must take non-conservative terms $S(x) \frac{\partial P}{\partial x}$ into account in a suitable way. Actually, the connection of states around the steady wave $\lambda = 0$ is enforced by imposing that the Riemann invariants of the steady wave are preserved on both sides of $x/t = 0$. This makes sense since the associated steady wave is linearly degenerated. For the Euler set of equations described above in system (23), these Riemann invariants I_0^k are simply $I_0^1 = Q = \rho u S(x)$, $I_0^2 = QH$ and the entropy $I_0^3 = \eta(P, \rho)$. For more details on the Well Balanced approach, we refer the reader to references [16,17,19], among others.

10 Bibliography

References

- [1] Audebert, B. and Hérard, J.-M. and Martin, X. and Touazi, O., A simple integral approach to compute flows in ducts with variable cross section, *EDF report H-185-2014-05201-EN*, submitted for publication 2014.
- [2] Audusse, E. and Bouchut, F. and Bristeau, M.O. and Klein, R. and Perthame, B., A robust and entropy-satisfying numerical scheme for fluid flows in discontinuous nozzles, *SIAM J. of Sci. Comp.*, pp.2050-2065, vol.25,2004.
- [3] Bear, J., Dynamics of fluids in porous media, *Courier Corporation*, 1972.
- [4] Berry, R.A. and Peterson, J.W. and Zhang, H. and Martineau, C. and Zhao, H. and Zou, L. and Andrs, A. , RELAP-7. Theory Manual , *INL report INL/EXT-14-31366*, december 2014.
- [5] Code-Saturne 4.0. Theory Manual, <http://code-saturne.org/cms/sites/default/files/docs/4.0/theory.pdf> , available on <http://code-saturne.org/>, 2015.
- [6] Coquel, F. and Saleh, K. and Seguin, N., A robust and entropy-satisfying numerical scheme for fluid flows in discontinuous nozzles, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, pp.2043-2083, vol.24,2014.
- [7] De Ville, A., On the properties of compressible gas flow in a porous media, *Transport Porous Media*, pp.287-306, vol.22,1996.
- [8] Dubois F., Boundary conditions and the Osher scheme for the Euler equations of gas dynamics, *CMAP report, Ecole Polytechnique*, 1987.
- [9] Eymard, R. and Gallouët, T. and Herbin, R., Finite Volume Methods, *Handbook of Numerical Analysis*, pp.713-1018, 2000.
- [10] Eymard, R. and Gallouët, T. and Guichard, C. and Herbin, R. and Masson, R., TP or not TP, that is the question, *Computational Geosciences*, pp. 285-296, vol. 18(3-4) 2014.
- [11] Eymard, R. and Gallouët, T. and Herbin, R., Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes SUSHI: a scheme using stabilization and hybrid interfaces, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2009.
- [12] Eymard, R. and Henry, G. and Herbin, R. and Hubert, F. and Klokorn, R. and Manzini, G., 3D benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids, *Proceedings of the 6th International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications: FVCA6*, pp.895-930, 2011.
- [13] Gallouët, T. and Hérard, J.-M. and Seguin, N., On the use of symetrizing variables for vacuums., *Calcolo*, pp.163-194, vol.40, 2003.

- [14] Girault, L. and Hérard, J.-M., A two-fluid hyperbolic model in a porous medium., *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, pp.1319-1348, vol.44, 2010.
- [15] Girault, L. and Hérard, J.-M. , Multidimensional computations of a two-fluid hyperbolic model in a porous medium., *International Journal on Finite Volumes*, <http://ijfv.episciences.org/>, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01114209v1>, pp.1-33, 7, 2010.
- [16] Gosse, L., A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, pp.339-365, vol.11, 2001.
- [17] Gosse, L. and Leroux, A. Y., Un schéma-équilibre adapté aux lois de conservation scalaires non-homogènes, *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, pp.543-546, vol.323, 1996.
- [18] Grandotto, M. and Obry, P., Calculs des écoulements diphasiques dans les échangeurs par une méthode aux éléments finis, *Revue Européenne des Eléments Finis*, pp.53-74, vol.5, 1996.
- [19] Greenberg, J.-M. and Leroux, A.-Y., A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations., *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1996, pp.1-16, vol.33.
- [20] Hérard, J.-M. , A rough scheme to couple free and porous media, *International Journal on Finite Volumes*, <http://ijfv.episciences.org/>, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01114212v1>, pp.1-28, 3, 2006.
- [21] Hérard, J.-M., Un modele diphasique bifluide en milieu poreux, *Comptes Rendus Mécanique*, pp.650-655, vol.336(8), 2008.
- [22] Hérard, J.-M. and Jung, J., An interface condition to compute compressible flows in variable cross section ducts, *in revised form*, 2015.
- [23] Herbin, R. and Hubert, F., Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids, *Proceedings of the 5th International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications: FVCA5*, pp.659-692, 2008.
- [24] Idel'Cik, I. E., Memento des pertes de charge, *Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricite de France, Paris: Eyrolles*, 1969.
- [25] Jung, J., Schémas numériques adaptés aux accélérateurs multicoeurs pour les écoulements bifluides, *PhD thesis, Université Strasbourg*, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00876159v2>, 2013.
- [26] Kröner, D. and Thanh, M. D. , Numerical solutions to compressible flows in a nozzle with variable cross-section., *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2006, pp.796-824, vol.43.

- [27] Le Coq, G. and Aubry, S. and Cahouet, J. and Lequesne, P. and Nicolas, G. and Pastorini, S., The THYC computer code. A finite volume approach for 3 dimensional two-phase flows in tube bundles, *Bulletin de la Direction des études et recherches-Electricité de France. Série A, nucléaire, hydraulique, thermique. In french*, pp.61–76, 1989.
- [28] Martin, X. , Numerical modeling of flows in obstructed media , *PhD thesis, Université Aix Marseille*, in preparation.
- [29] Rochette, D. and Clain, S., Mathematical model and simulation of gas flow through a porous medium in high breaking capacity fuses, *Heat and Fluid Flow*, pp. 115-126, vol.25,2004.
- [30] Rochette, D. and Clain, S. and Buffard, T. , Numerical scheme to complete a compressible gas flow in variable porosity media, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, pp. 299-309, vol.19,2005.
- [31] Toumi, I. and Bergeron, A. and Gallo, D. and Royer, E. and Caruge, D., FLICA-4: a three-dimensional two-phase flow computer code with advanced numerical methods for nuclear applications, *Nuclear Engineering and Design*, pp. 139-155, vol.200, 2000.

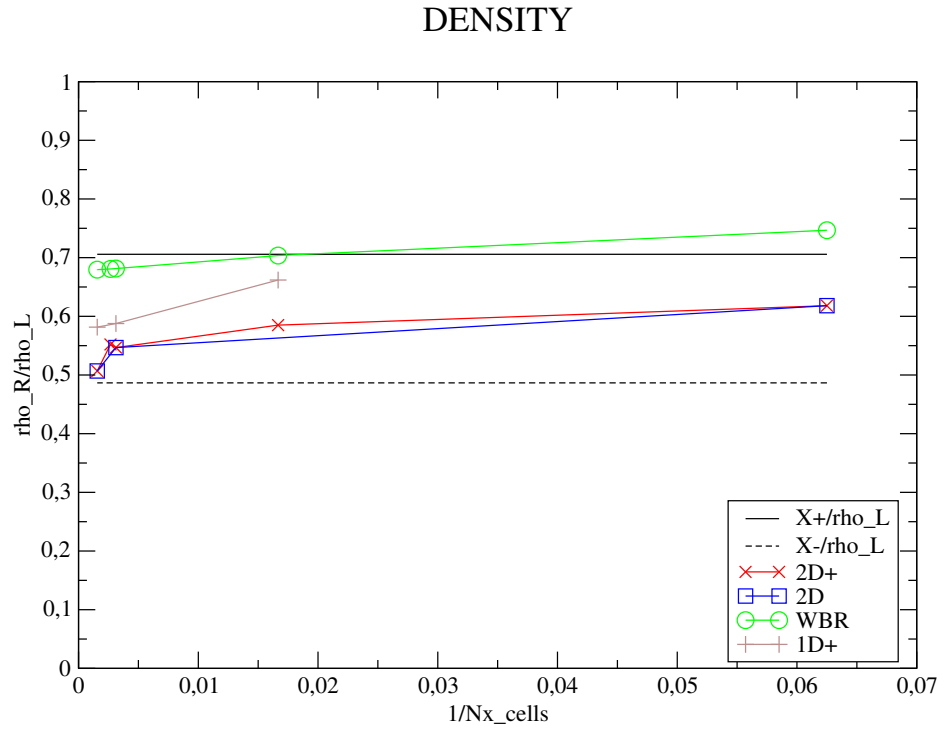


Figure 28: Test case B. Density ratio between the right side and the left side of the contraction, as a function of the mesh size h . The blue squares (resp. red crosses) refer to the full two-dimensional simulation (respectively to the new $2D+$ approach). Computational results are also compared with those provided by the one-dimensional approach, following either the classical porous (or variable cross section) approach, while using the Well-balanced scheme of Kröner and Thanh (green circles), or the integral $1D+$ approach introduced in reference [1] (brown crosses). X^- and X^+ correspond to the density roots of equations (16), (17) and (18) provided in section 4.2. The full black line (resp. dashed black line) corresponds to the ratio of X^+ (resp. X^-) normalized by the given density ρ_L .

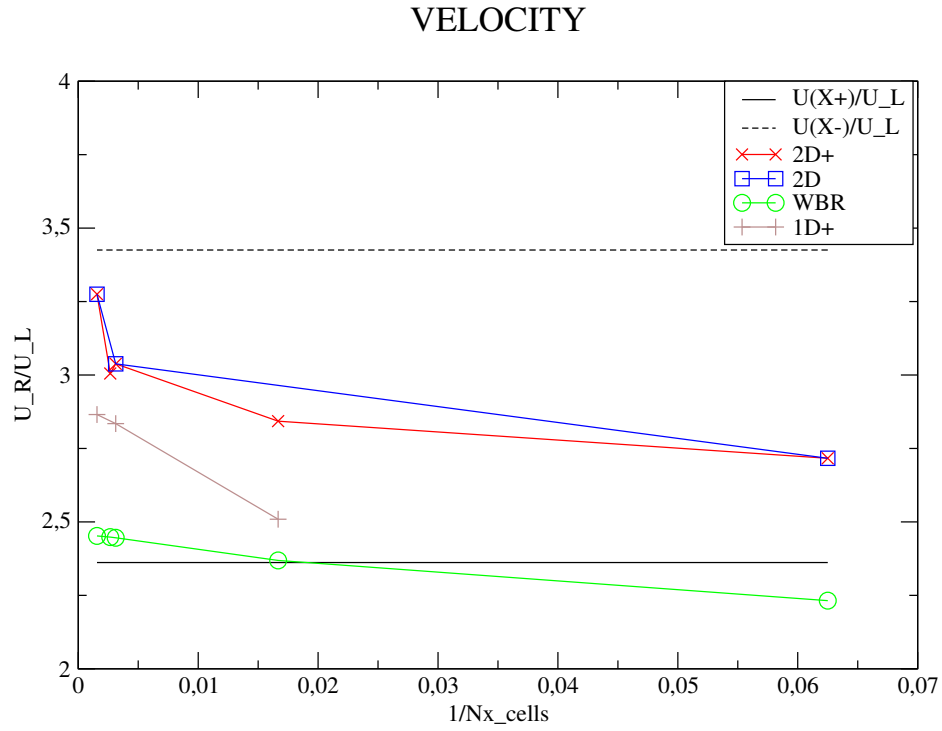


Figure 29: Test case B. Velocity ratio between the right side and the left side of the contraction, as a function of the mesh size h . The blue squares (resp. red crosses) refer to the full two-dimensional simulation (respectively to the new $2D+$ approach). Computational results are also compared with those provided by the one-dimensional approach, following either the classical porous (or variable cross section) approach, while using the Well-balanced scheme of Kröner and Thanh (green circles), or the integral $1D+$ approach introduced in reference [1] (brown crosses). X^- and X^+ correspond to the density roots of equations (16), (17) and (18) provided in section 4.2. The full black line (resp. dashed black line) corresponds to the ratio of the velocity $U(X^+)$ (resp. $U(X^-)$) normalized by the given velocity U_L .

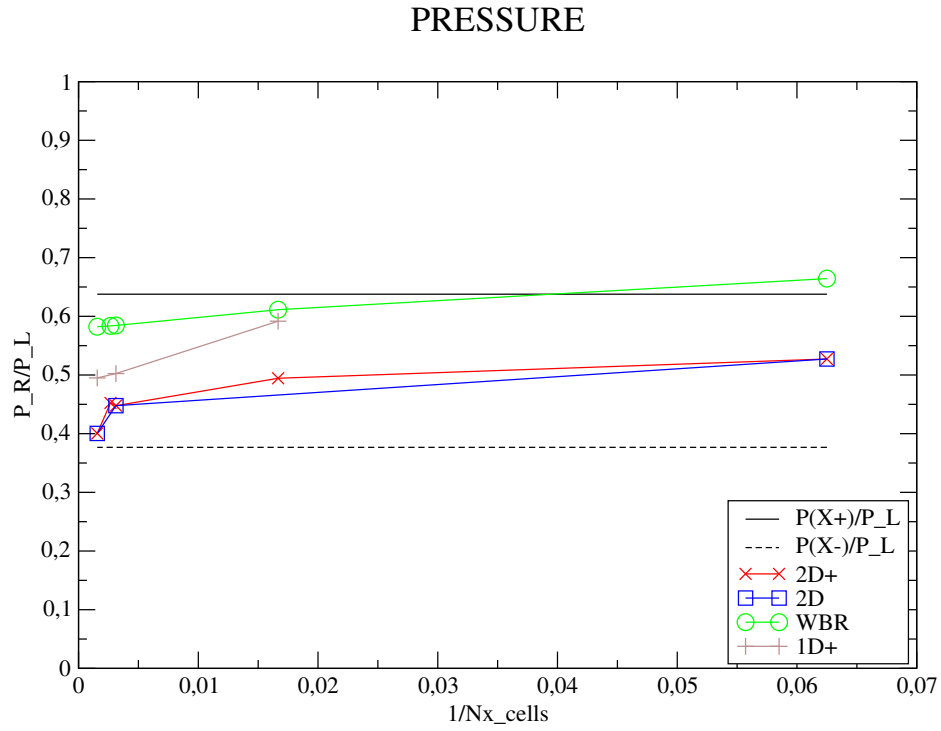


Figure 30: Test case B. Pressure ratio between the right side and the left side of the contraction, as a function of the mesh size h . The blue squares (resp. red crosses) refer to the full two-dimensional simulation (respectively to the new $2D+$ approach). Computational results are also compared with those provided by the one-dimensional approach, following either the classical porous (or variable cross section) approach, while using the Well-balanced scheme of Kröner and Thanh (green circles), or the integral $1D+$ approach introduced in reference [1] (brown crosses). X^- and X^+ correspond to the density roots of equations (16), (17) and (18) provided in section 4.2. The full black line (resp. dashed black line) corresponds to the ratio of the pressure $P(X^+)$ (resp. $P(X^-)$) normalized by the given pressure P_L .

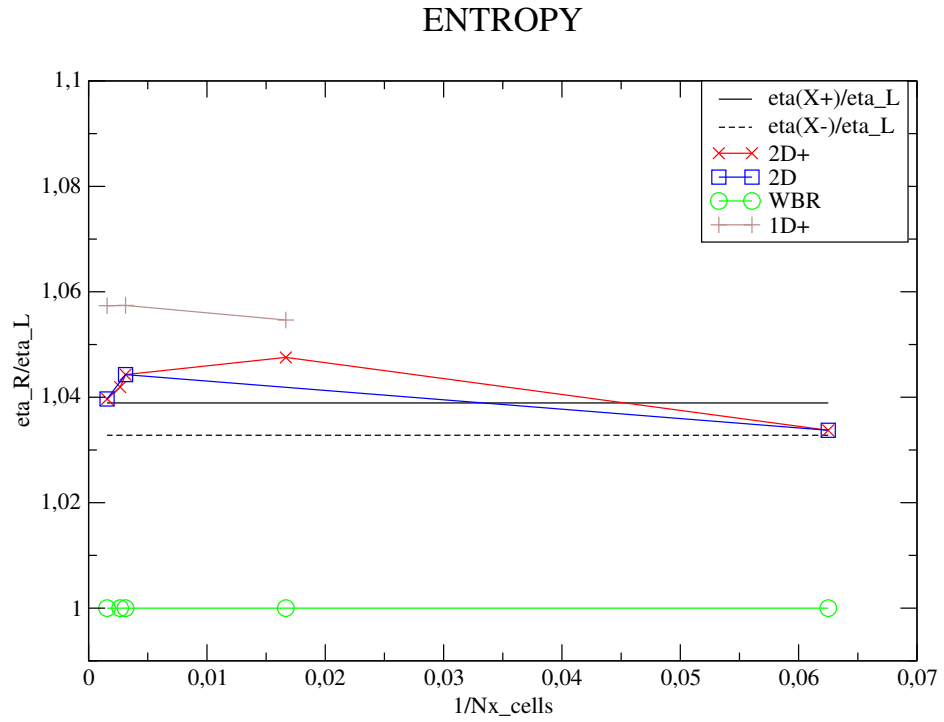


Figure 31: Test case B. Entropy ratio between the right side and the left side of the contraction, as a function of the mesh size h . The blue squares (resp. red crosses) refer to the full two-dimensional simulation (respectively to the new 2D+ approach). Computational results are also compared with those provided by the one-dimensional approach, following either the classical porous (or variable cross section) approach, while using the Well-balanced scheme of Kröner and Thanh (green circles), or the integral 1D+ approach introduced in reference [1] (brown crosses). X^- and X^+ correspond to the density roots of equations (16), (17) and (18) provided in section 4.2. The full black line (resp. dashed black line) corresponds to the ratio of the entropy $\eta(X^+)$ (resp. $\eta(X^-)$) normalized by the given entropy η_L .

Présentation des résultats :

B.1 Cas test de vérification - Simulation d'écoulement dans un modèle inter-canaux

B.1.1 L'expérience.

Ce premier cas test est principalement un cas test de vérification numérique et d'adaptation de maillage.

On simule l'écoulement d'un fluide à l'intérieur de trois canaux séparés les uns des autres par deux internes de type tubulaire, jusqu'à un état numériquement stationnaire. Le domaine est rectangulaire, de longueur infinie en amont et en aval suivant le sens de l'écoulement. Les deux internes (crayons ou tubes) de longueur infinie également, sont disposés parallèlement les uns aux autres et dans le sens de l'écoulement, de sorte à obtenir trois canaux indépendants (voir FIGURE B.1). Ces internes sont non poreux, non perméables et n'émettent aucune chaleur. Théoriquement parlant, il n'y a pas de « communication » entre les canaux.

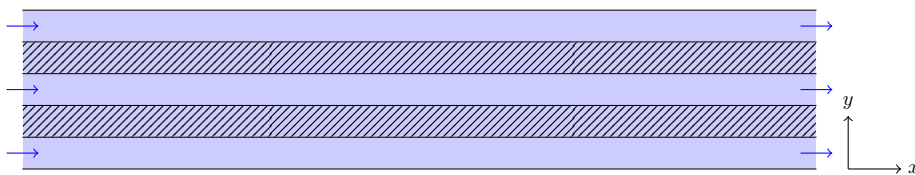


FIGURE B.1: *Modèle inter-canaux*

La trivialité de ce cas test implique la connaissance de la solution analytique stationnaire non visqueuse. On peut donc facilement vérifier les résultats numériques. L'écoulement est censé être stationnaire, localement unidirectionnel et uniforme entre deux internes.

L'objectif premier est la vérification informatique lorsque le maillage est adapté, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas d'interne divisant une cellule en deux sous-cellules distinctes (internes dits de type (3) sur FIGURE B.3). Plus loin, on comprendra mieux pourquoi le maillage et sa disposition sont important, mais cela n'empêchera pas d'observer le comportement de la solution en présence d'internes de type (3).

On travaillera avec plusieurs maillages, de sorte à parcourir un maximum de situations de vérifications et de validations. On testera en particulier le comportement de l'écoulement en présence de mailles faiblement poreuses (i.e. non solide mais avec un très faible volume de fluide), dans le but de tester la robustesse et la pérénnité du code. De plus, le raffinement du maillage sera essentiellement dans la direction transverse aux canaux, parce qu'on se doute intuitivement que la convergence en maillage suivant la direction \vec{x} n'a pas d'intérêt significatif.

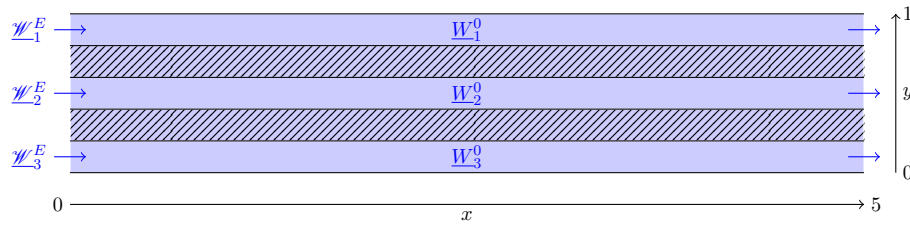


FIGURE B.2: *Modèle inter-canaux*

Quel que soit le maillage, on impose un flux en entrée (par la gauche du domaine), différent et indépendant pour chaque canal (noté W_k^E pour $k=1, 2$ ou 3 sur la FIGURE B.2). La condition limite de droite est une condition de sortie libre du fluide. Initialement, le fluide est au repos dans tout le domaine, sous des conditions identiques dans chaque canal mais différentes des conditions d'entrée. Finalement, les mailles totalement solides ont leur propre définition, parfois aberrantes ou incohérentes, de sorte à se convaincre de l'absence de communication qui pourrait provenir des mailles solides en cas de bug.

Tous les maillages sont réguliers, composés de mailles rectangulaires (voire carrées dans certains cas, mais sans importance particulière).

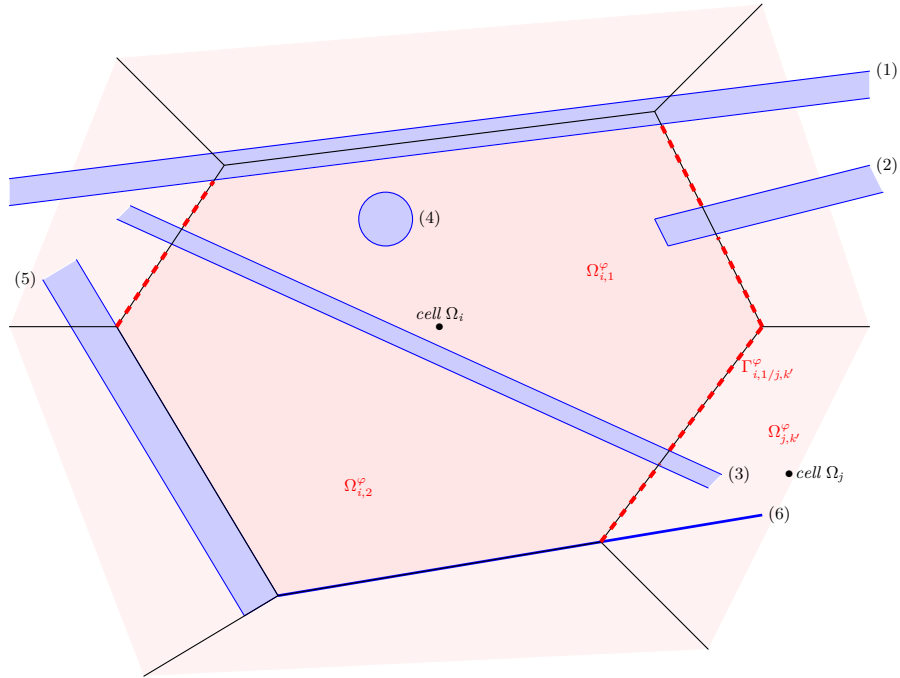


FIGURE B.3: A (pink) control volume Ω_i includes (blue) obstacles numbered from 1 to 5. Obstacles may : be aligned with part of the boundary of cell i (element 5); partially occupy one fluid cell (or subcell) (element 2); fully cross cell i and split it into two fluid sub-cells $\Omega_{i,1}^\phi$ and $\Omega_{i,2}^\phi$ (element 3); be totally included in cell i or one of its subcells (element 4); overlap part of the boundary of cell i (element 1). The dashed red surface corresponds to the fluid-fluid part of the boundary $\Gamma_{i,k}^\phi$ between sub-cells $\Omega_{i,k}^\phi$ and their neighbouring sub-cells occupied by the fluid.

B.1.2 Simulation 1 : un maillage trop grossier.

On débute par le maillage le plus grossier testé, composé de 15 cellules dans la direction des canaux, et seulement 2 cellules dans le sens transverse aux canaux (voir FIGURE B.4. Toutes les cellules ont la même taille).

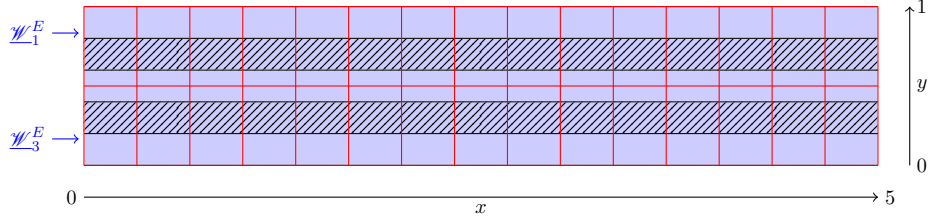


FIGURE B.4: En rouge, le maillage composé de 15×2 cellules, superposé au domaine géométrique.

Les mailles possèdent toutes le même taux de porosité $\epsilon_i = \frac{\Omega_i^\varphi}{\Omega_i} = \frac{0.3 \times dx}{dy \times dx} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$. On initialise la densité ρ , la vitesse $\underline{U} = (u, v)$ et la pression P comme suit : $\underline{W}_i^0 = (\rho_i^0, u_i^0, v_i^0, P_i^0) = (1, 0, 0, 10^4)$.

Les mailles sont toutes traversées par un interne « de type 3 ». Chaque cellule est donc scindée en deux sous parties censées ne pas physiquement communiquer entre elles, car appartenant chacune à l'un des canaux. Néanmoins, on calcule numériquement un état moyen dans le volume de contrôle (voir FIGURE B.4).

De plus, on ne peut pas imposer trois flux d'entrée différents. Seuls deux sont possibles. On choisit alors :

$$\underline{W}_1^E = \begin{pmatrix} \rho_1^E \\ u_1^E \\ v_1^E \\ P_1^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 200 \\ 0 \\ 2 \cdot 10^4 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{W}_3^E = \begin{pmatrix} \rho_3^E \\ u_3^E \\ v_3^E \\ P_3^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 500 \\ 0 \\ 5 \cdot 10^4 \end{pmatrix}$$

On obtient tout de même un état stationnaire, obtenu par calcul des résidus.

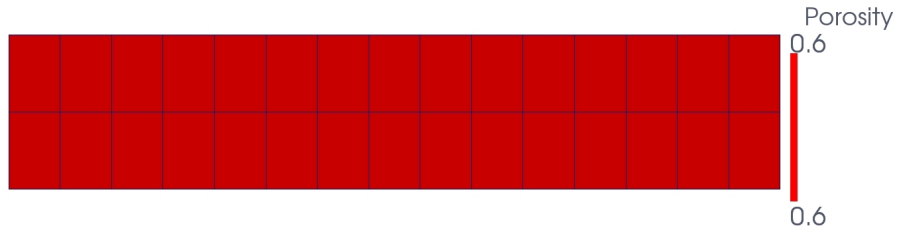
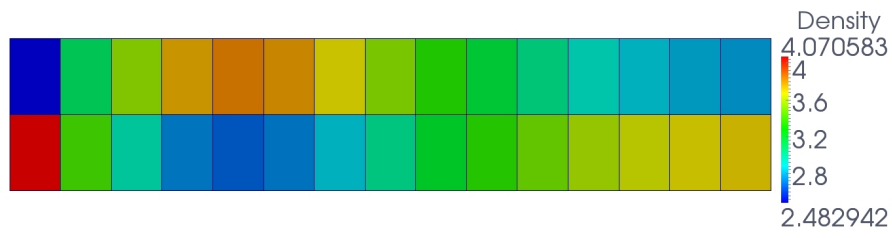
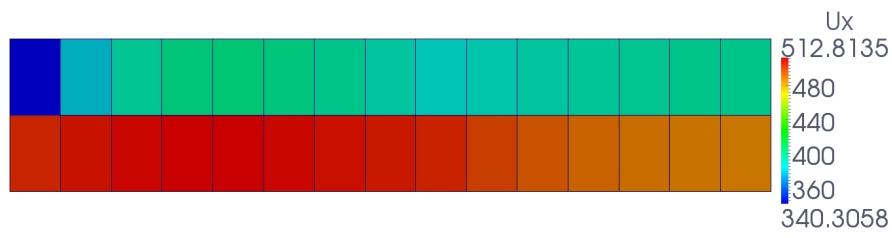
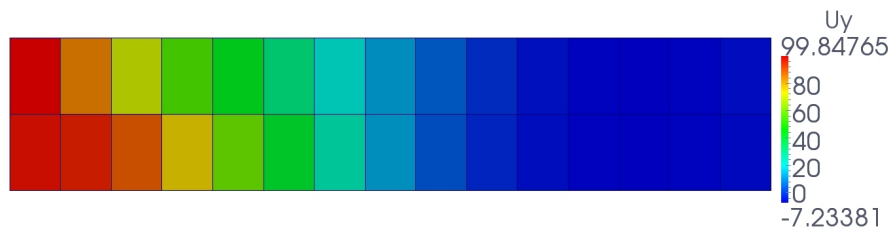
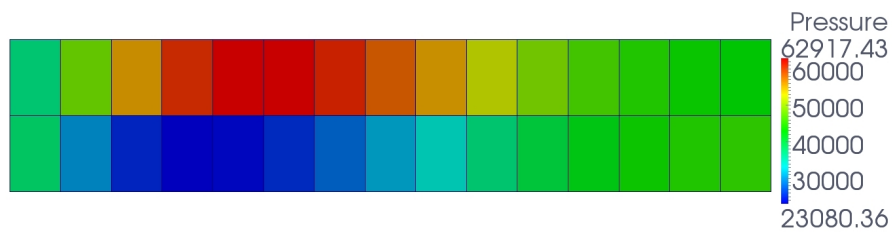
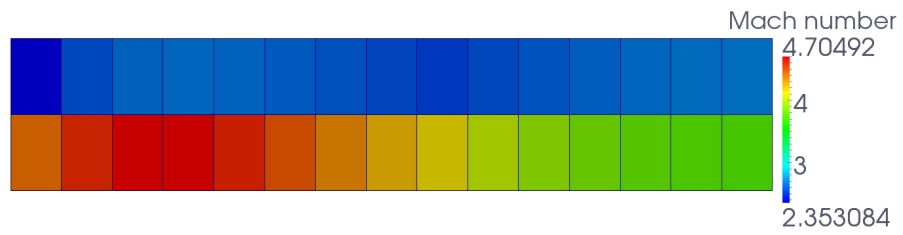
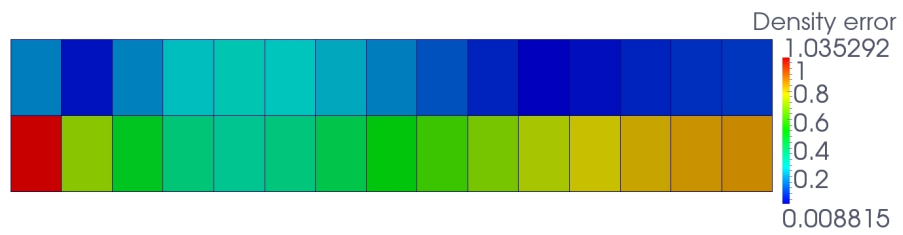
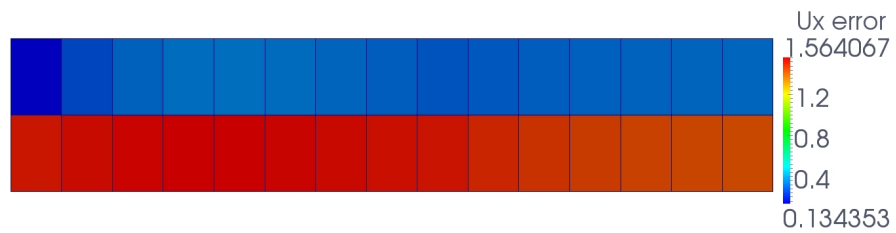
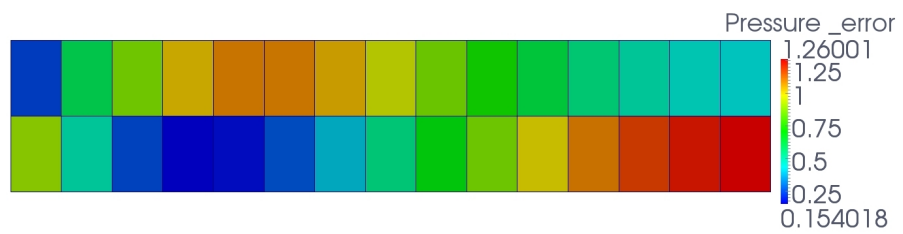
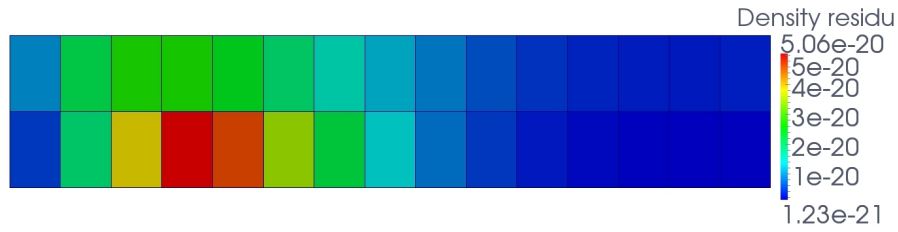
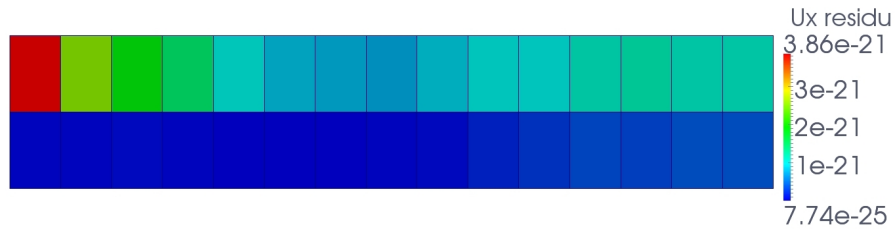
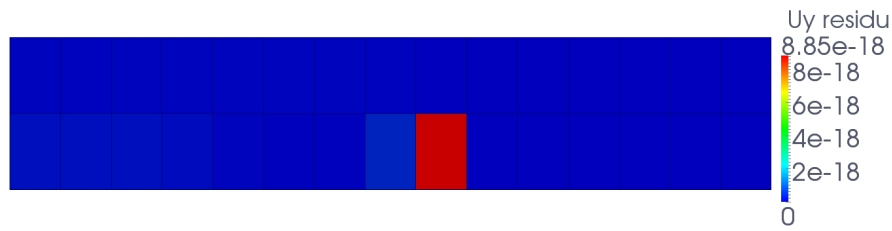
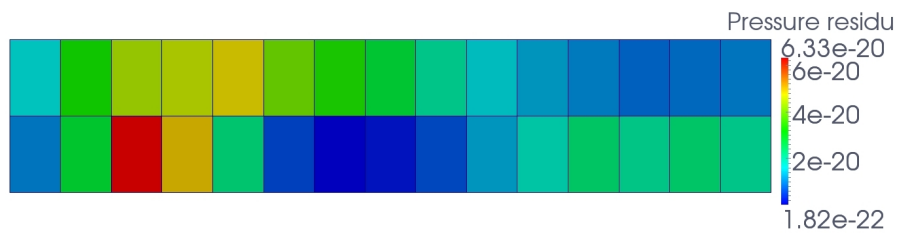


FIGURE B.5: Porosity
La porosité est uniforme dans tout le maillage.

FIGURE B.6: *Density*FIGURE B.7: *X-velocity*FIGURE B.8: *Y-velocity*FIGURE B.9: *Pressure*

FIGURE B.10: *Mach*FIGURE B.11: *Density error*FIGURE B.12: *X-velocity error*FIGURE B.13: *Pressure error*

FIGURE B.14: *Density residu*FIGURE B.15: *X-velocity residu*FIGURE B.16: *Y-velocity residu*FIGURE B.17: *Pressure residu*

B.1.3 Simulation 2 : un maillage grossier adapté

On construit un maillage grossier, mais adapté à la géométrie, de sorte à éviter que les canaux communiquent et qu'il y ait des internes « de type (3) ». Le maillage est composé de 15 cellules dans le sens des canaux, et 3 dans la direction transverse (voir FIGURE B.18).

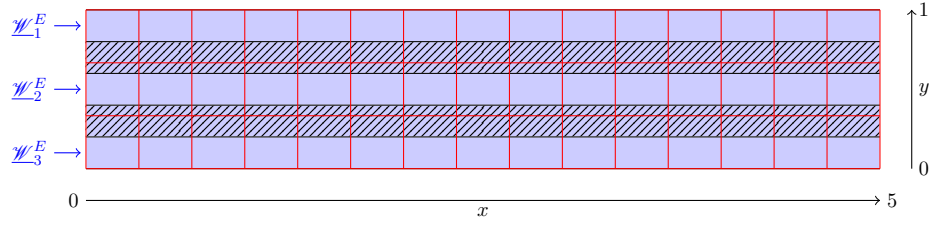


FIGURE B.18: En rouge, le maillage composé de 15×3 cellules, superposé au domaine géométrique.

De par la position des internes et de la répartition particulière des cellules, toutes les mailles ont le même volume de fluide $\Omega_i^\varphi = 0.2 \times \frac{1}{3}$ et le même taux de porosité $\epsilon_i = 0.6$. Les cellules sont initialisées comme précédemment

$$\underline{W}_i^0 = (\rho_i^0, u_i^0, v_i^0, P_i^0) = (1, 0, 0, 10^4)$$

.

et on peut impose 3 flux distincts en entrée :

$$\underline{\mathcal{W}}_1^E = \begin{pmatrix} 3 \\ 300 \\ 0 \\ 3 \cdot 10^4 \end{pmatrix}; \underline{\mathcal{W}}_2^E = \begin{pmatrix} 2 \\ 200 \\ 0 \\ 2 \cdot 10^4 \end{pmatrix}; \underline{\mathcal{W}}_3^E = \begin{pmatrix} 5 \\ 500 \\ 0 \\ 5 \cdot 10^4 \end{pmatrix}$$

.

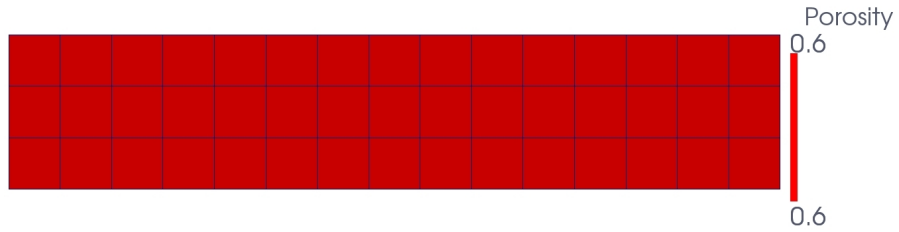


FIGURE B.19: Porosity

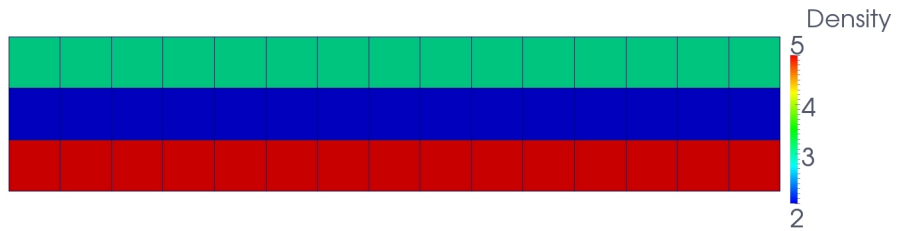
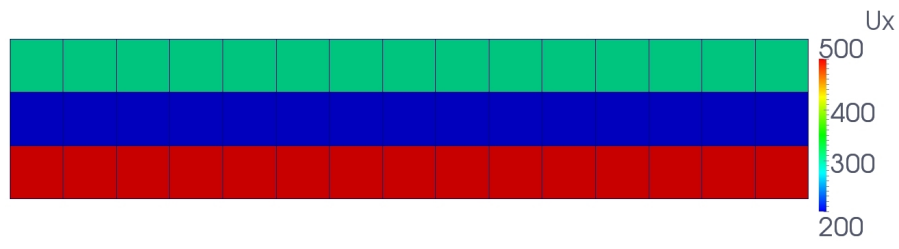
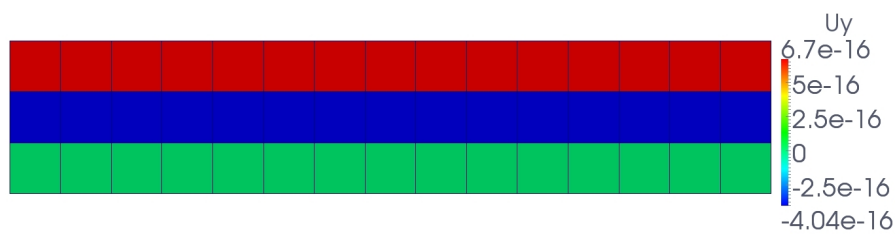
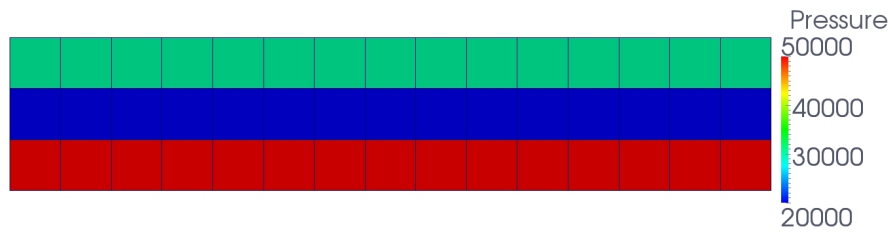
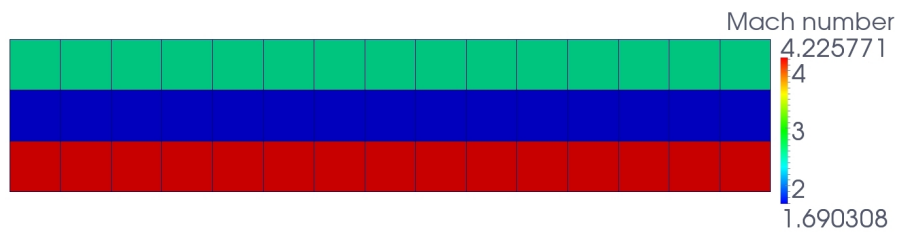


FIGURE B.20: Density

FIGURE B.21: *X-velocity*FIGURE B.22: *Y-velocity*FIGURE B.23: *Pressure*FIGURE B.24: *Mach*

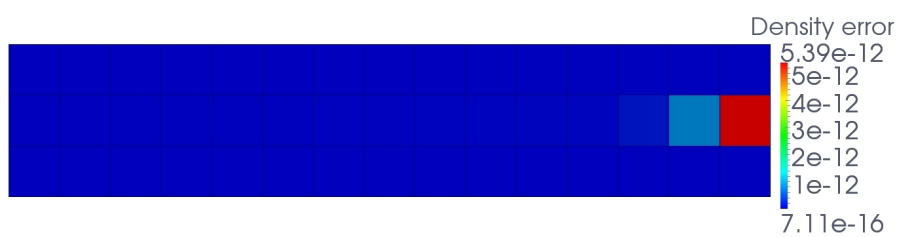


FIGURE B.25: Density error



FIGURE B.26: X-velocity error

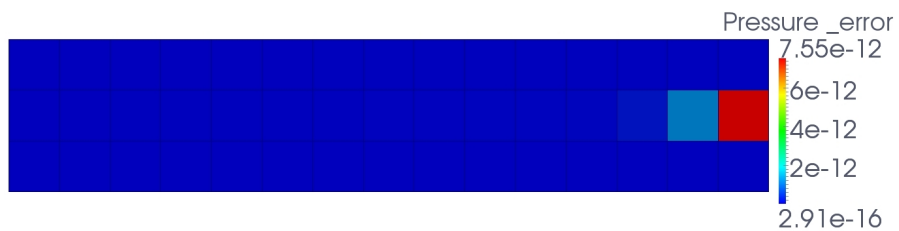


FIGURE B.27: Pressure error

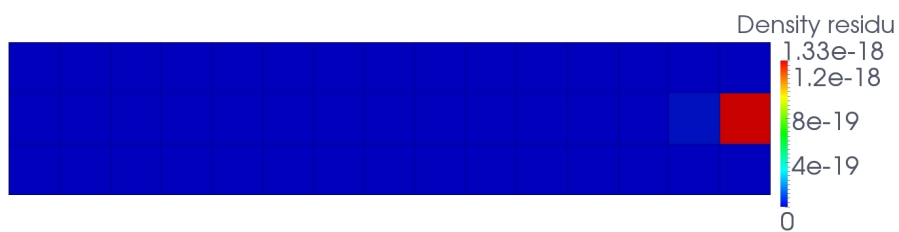
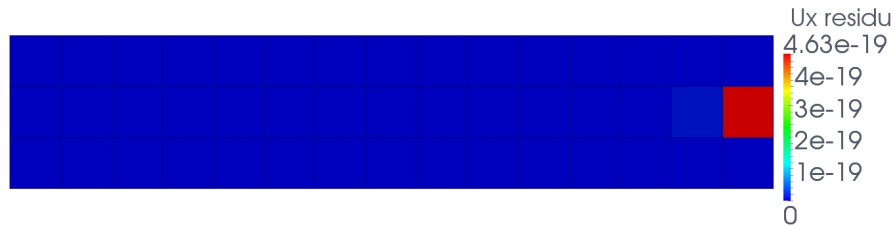
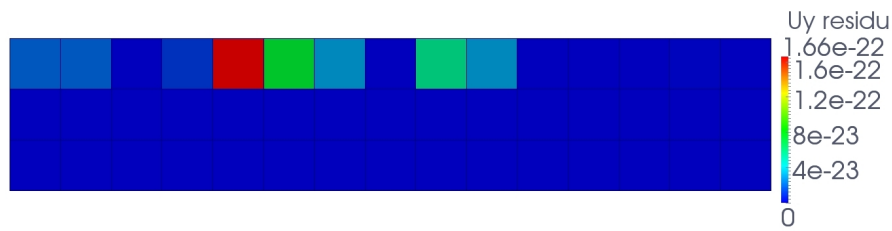
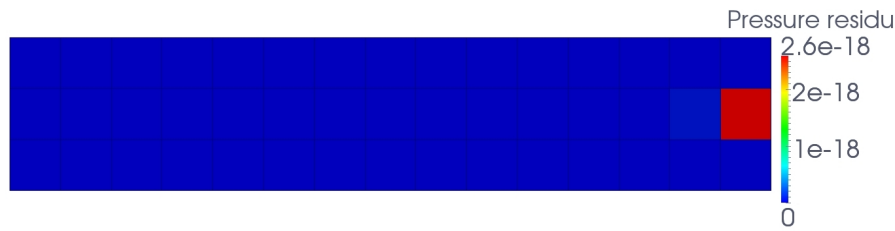
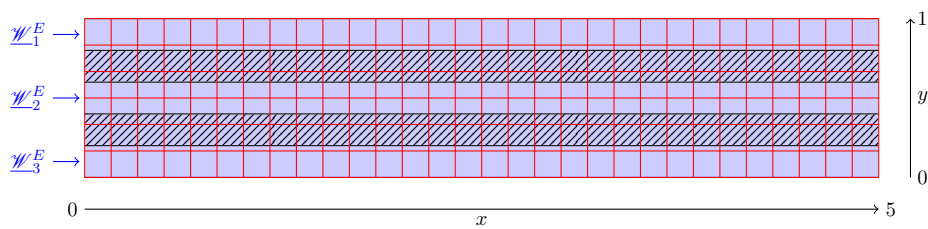


FIGURE B.28: Density residu

FIGURE B.29: *X-velocity residu*FIGURE B.30: *Y-velocity residu*FIGURE B.31: *Pressure residu*

B.1.4 Simulation 3 : un maillage plus fin

On travaille avec un maillage plus fin que le précédent, en divisant par 2 dans chaque direction les cellules, ce qui donne un maillage composé de 30×6 cellules identiques (voir FIGURE B.32).

FIGURE B.32: *En rouge, le maillage composé de 30×6 cellules superposé au domaine géométrique.*

Toutes les mailles n'ont pas le même taux de porosité. Certaines sont entièrement fluides ($\epsilon_i = 1$), d'autres ont un taux de porosité ϵ_i égal à 0.2 et 0.6. Les cellules sont toutes initialisées de la même manière : $\underline{W}_i^0 = (\rho_i^0, u_i^0, v_i^0, P_i^0) = (1, 0, 0, 10^4)$.

Les flux d'entrée sont une nouvelle fois les mêmes :

$$\underline{\mathcal{W}}_1^E = \begin{pmatrix} 3 \\ 300 \\ 0 \\ 3 \cdot 10^4 \end{pmatrix} ; \underline{\mathcal{W}}_2^E = \begin{pmatrix} 2 \\ 200 \\ 0 \\ 2 \cdot 10^4 \end{pmatrix} ; \underline{\mathcal{W}}_3^E = \begin{pmatrix} 5 \\ 500 \\ 0 \\ 5 \cdot 10^4 \end{pmatrix}$$

.

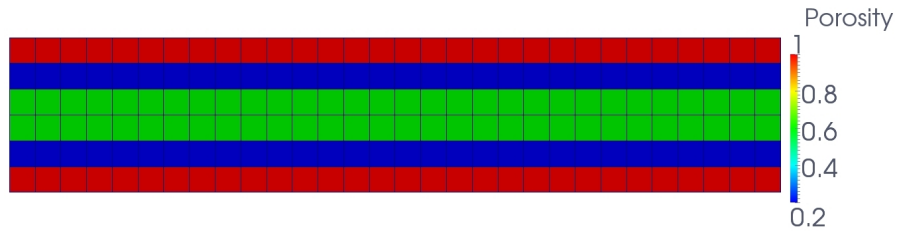


FIGURE B.33: Porosity

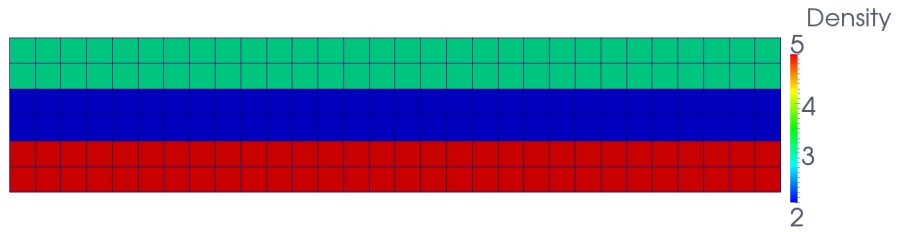


FIGURE B.34: Density

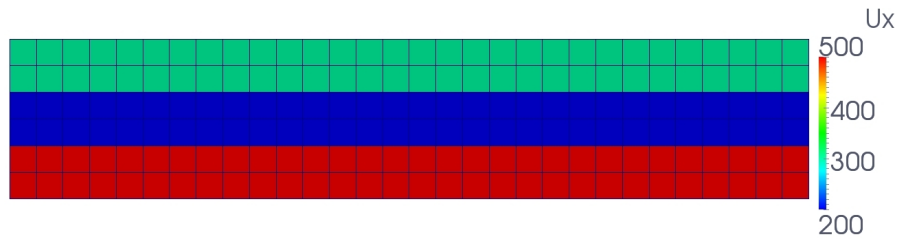
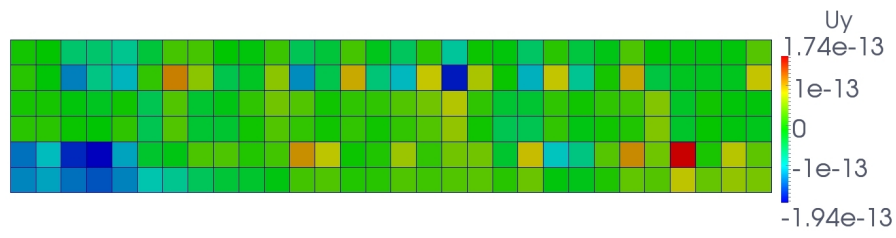
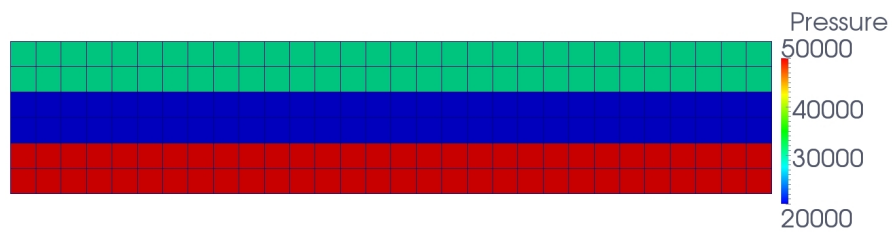
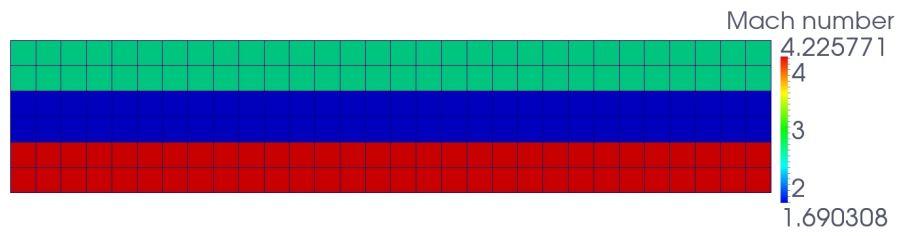
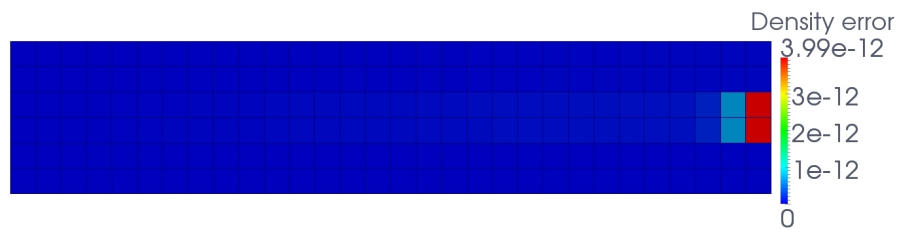
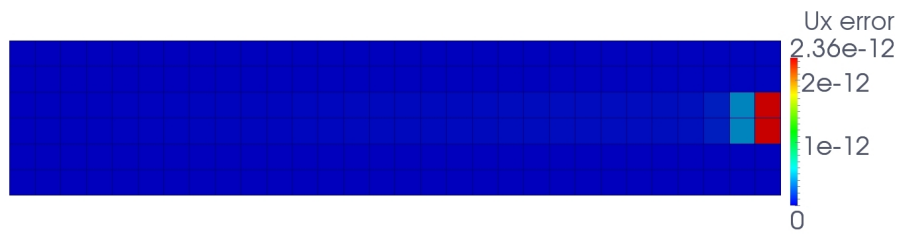
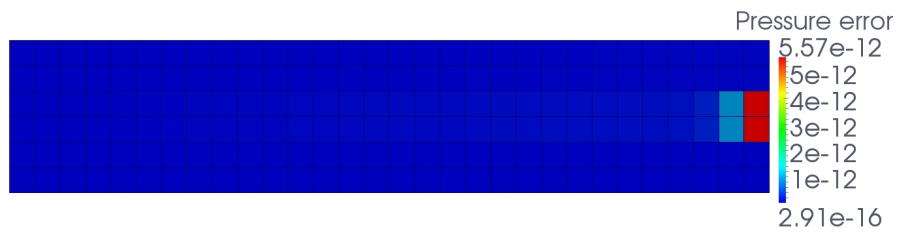
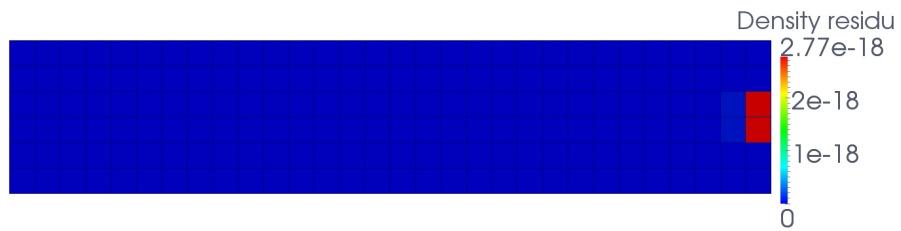
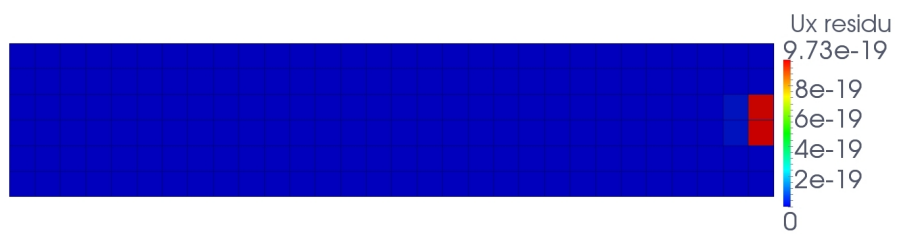


FIGURE B.35: X-velocity

FIGURE B.36: *Y-velocity*FIGURE B.37: *Pressure*FIGURE B.38: *Mach*FIGURE B.39: *Density error*

FIGURE B.40: *X-velocity error*FIGURE B.41: *Pressure error*FIGURE B.42: *Density residu*FIGURE B.43: *X-velocity residu*

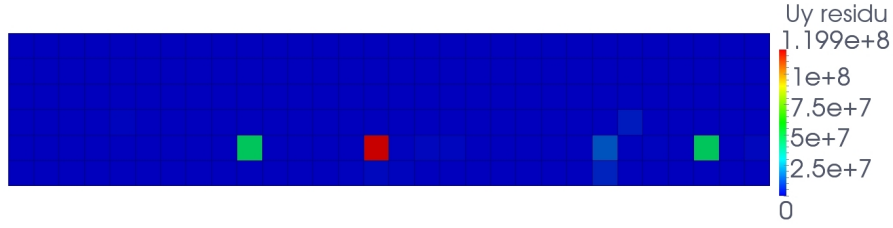


FIGURE B.44: Y-velocity residu

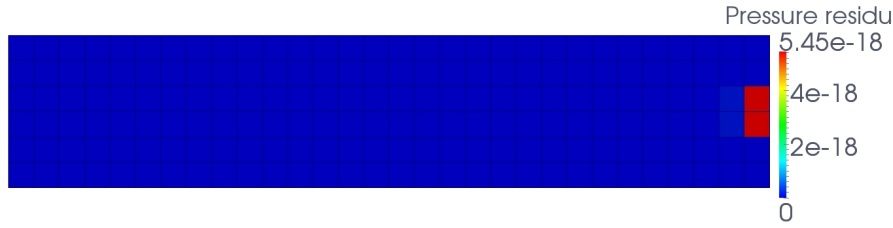


FIGURE B.45: Pressure residu

B.1.5 Simulation 4 : un maillage encore plus fin

On divise une nouvelle fois les cellules par 2 dans chaque direction, afin d'obtenir un maillages composé de 60×12 mailles (voir FIGURE B.46).

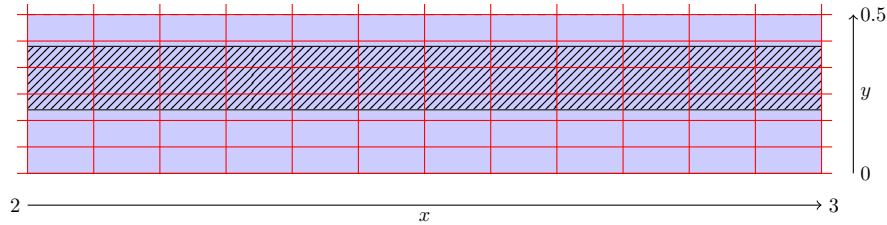


FIGURE B.46: En rouge, un focus sur $[2;3] \times [0;0.5]$ de la partie basse du maillage composé de 60×12 cellules superposé au domaine géométrique.

Comme précédemment, certaines cellules sont totalement fluides et d'autres poreuses. En plus de celles-ci, on constate la présence de mailles entièrement solides. On initialise alors les cellules de deux manières : les mailles fluides et poreuses sont initialisées comme avant : $\underline{W}_i^0 = (\rho_i^0, u_i^0, v_i^0, P_i^0) = (1, 0, 0, 10^4)$, tandis que les mailles solides sont définies de la façon suivante : $\underline{W}_i^s = (\rho_i^s, u_i^s, v_i^s, P_i^s) = (4, 0, 1, 4 \cdot 10^4)$. L'initialisation de ces mailles solides est purement arbitraire, mais très utile pour détecter d'éventuels problèmes dans l'écriture du code (en prenant des valeurs franchement aberrantes). En effet, ces cellules ne sont pas sensées influencer sur les cellules voisines et le reste du maillage.

Les flux d'entrée sont encore une fois identiques :

$$\underline{\mathcal{W}}_1^E = \begin{pmatrix} 3 \\ 300 \\ 0 \\ 3.10^4 \end{pmatrix} ; \underline{\mathcal{W}}_2^E = \begin{pmatrix} 2 \\ 200 \\ 0 \\ 2.10^4 \end{pmatrix} ; \underline{\mathcal{W}}_3^E = \begin{pmatrix} 5 \\ 500 \\ 0 \\ 5.10^4 \end{pmatrix}$$

.

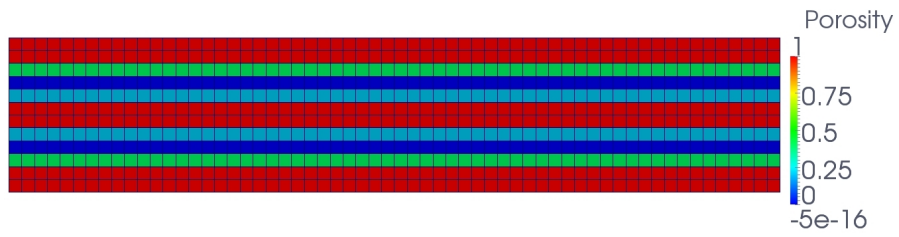


FIGURE B.47: *Porosity*

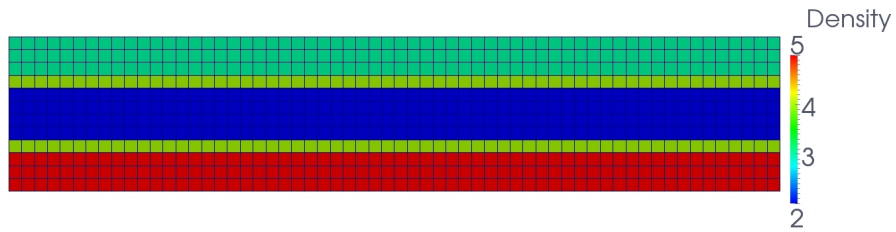


FIGURE B.48: *Density*

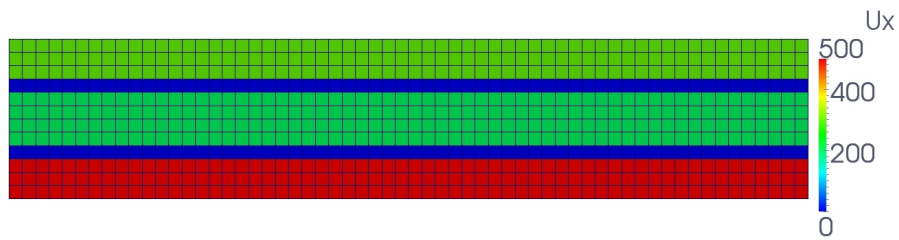
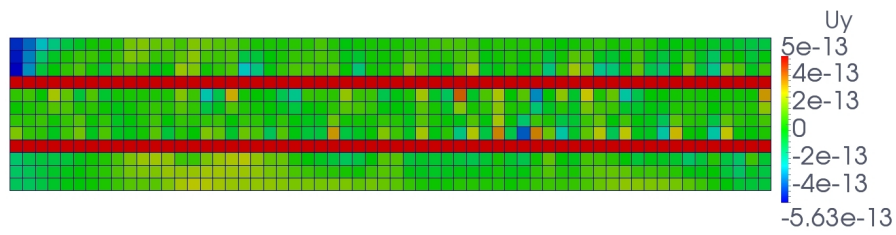
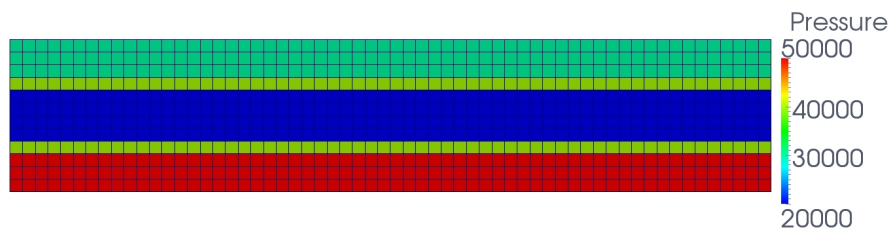
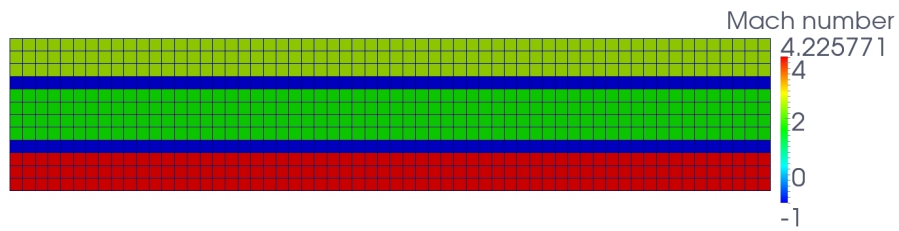
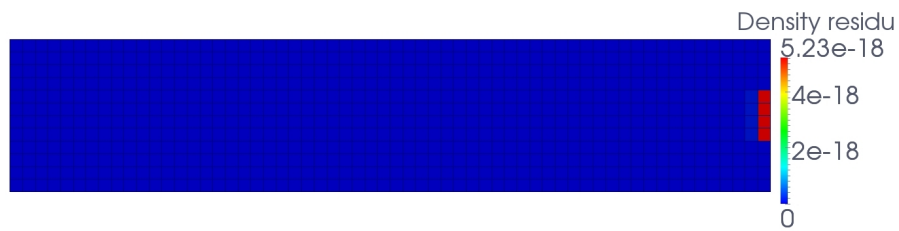
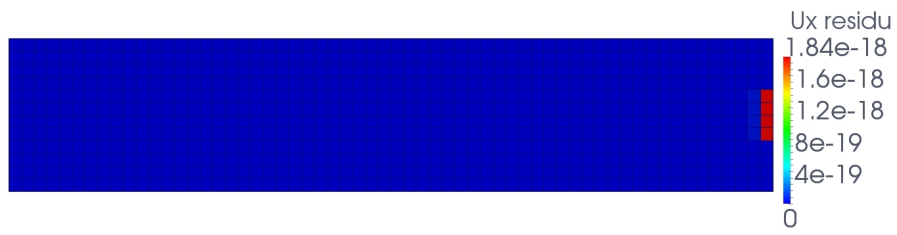
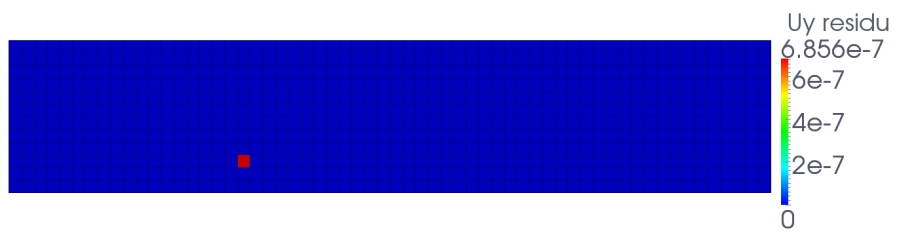
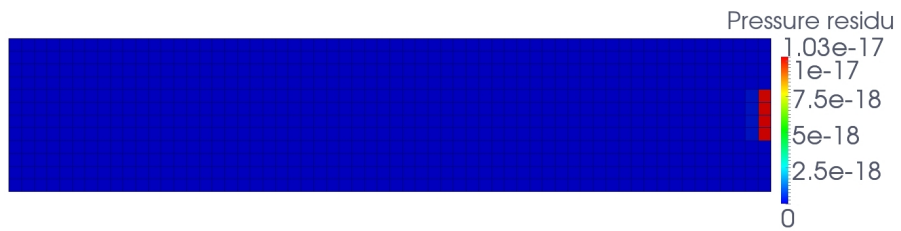
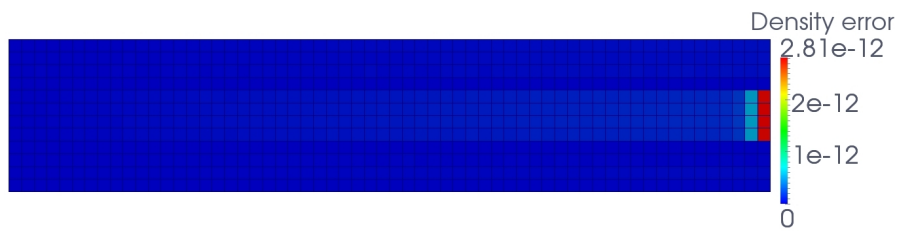
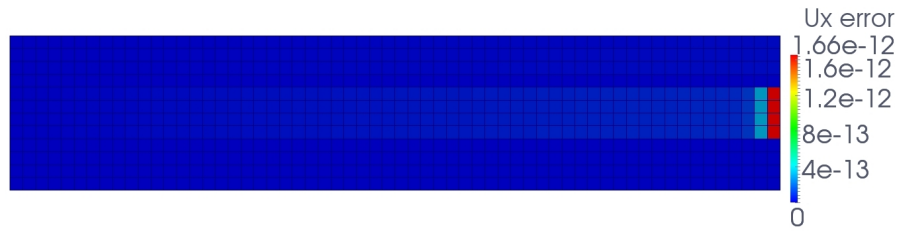
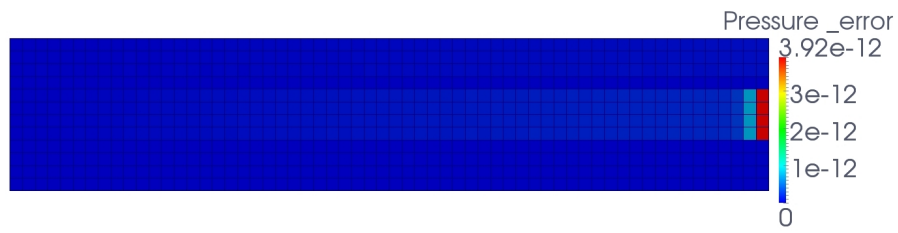
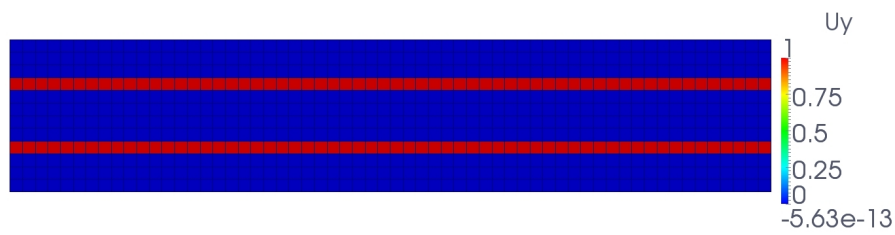


FIGURE B.49: *X-velocity*

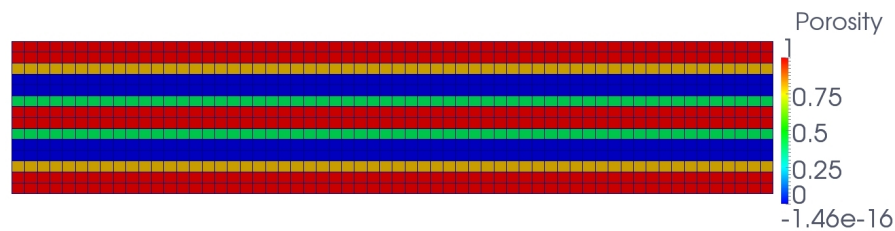
FIGURE B.50: *Y-velocity bis*FIGURE B.51: *Pressure*FIGURE B.52: *Mach*FIGURE B.53: *Density residu*

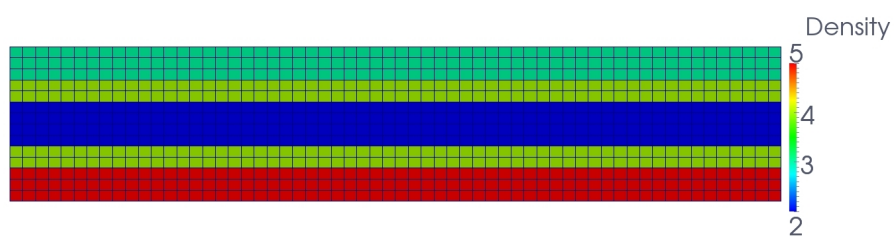
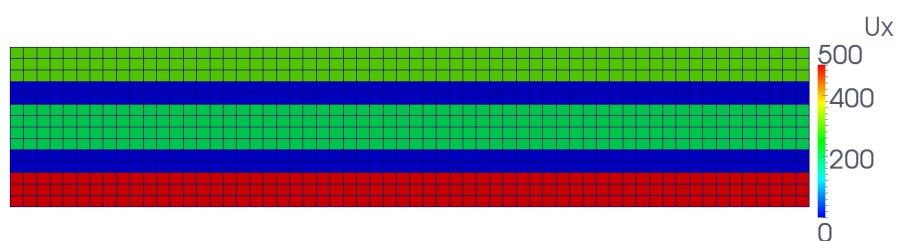
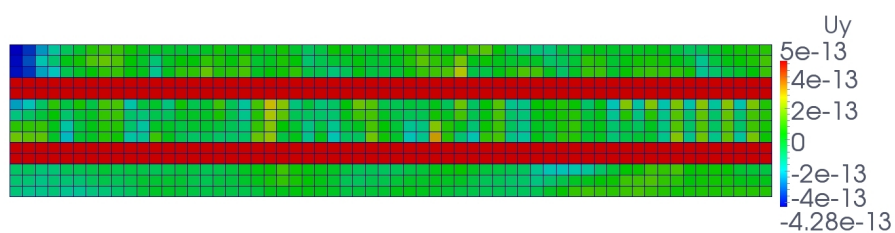
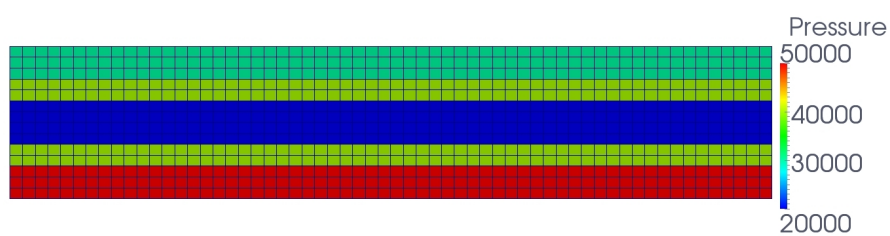
FIGURE B.54: *X-velocity residu*FIGURE B.55: *Y-velocity residu*FIGURE B.56: *Pressure residu*FIGURE B.57: *Density error*

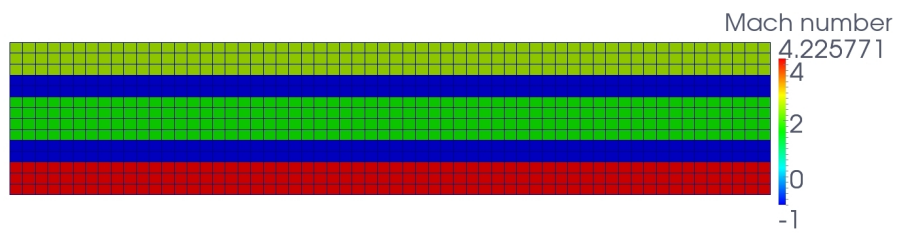
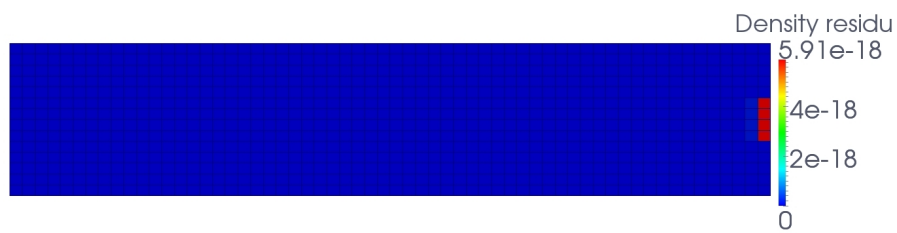
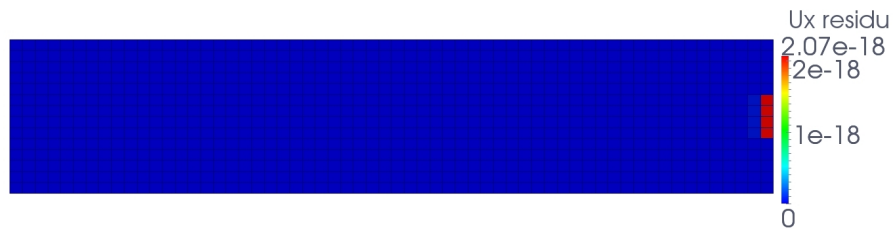
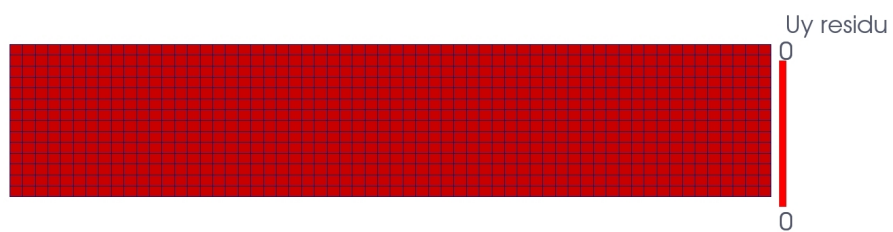
FIGURE B.58: *X-velocity error*FIGURE B.59: *Pressure error*FIGURE B.60: *Y-velocity*

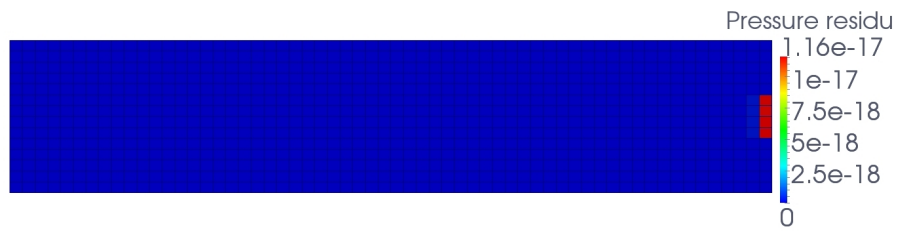
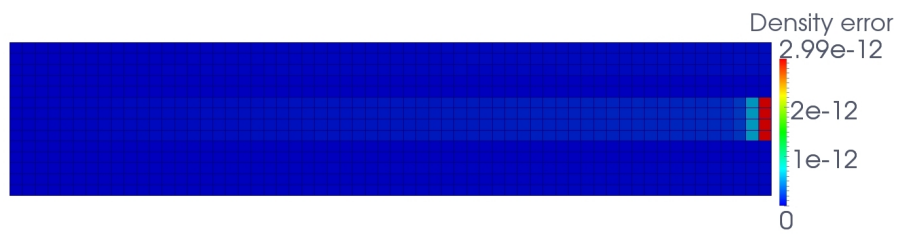
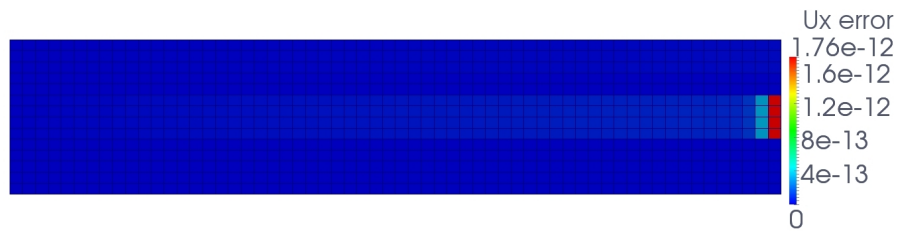
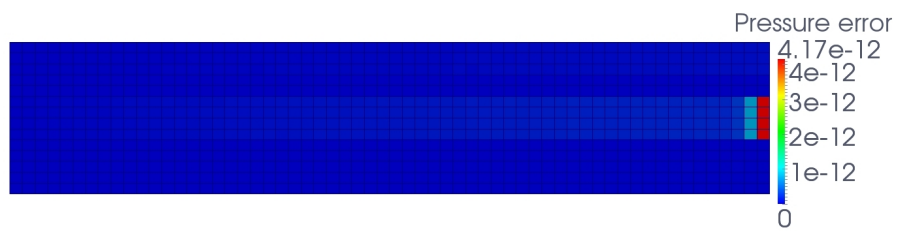
B.1.6 Simulation 5 : un autre maillage relativement fin

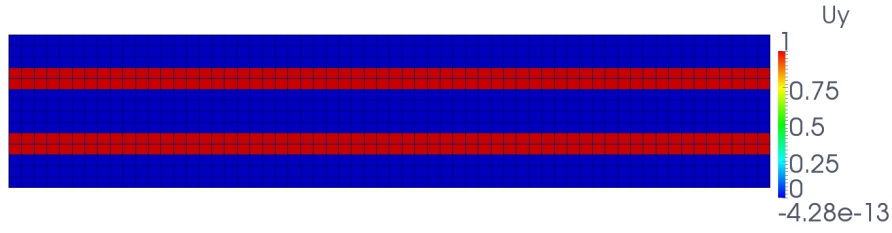
On superpose au domaine un maillage composé de 60×14 cellules. La finalité est la même que pour le point B.1.5.

FIGURE B.61: *Porosity*

FIGURE B.62: *Density*FIGURE B.63: *X-velocity*FIGURE B.64: *Y-velocity bis*FIGURE B.65: *Pressure*

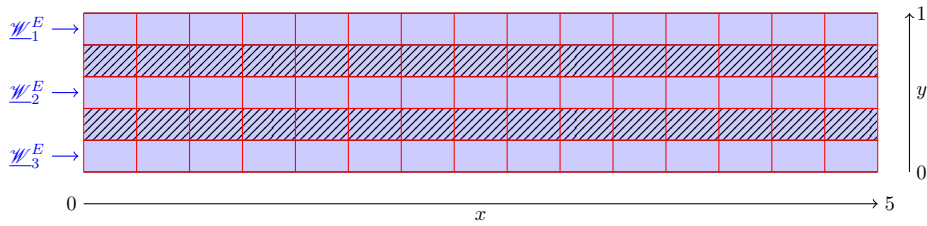
FIGURE B.66: *Mach*FIGURE B.67: *Density residu*FIGURE B.68: *X-velocity residu*FIGURE B.69: *Y-velocity residu*

FIGURE B.70: *Pressure residu*FIGURE B.71: *Density error*FIGURE B.72: *X-velocity error*FIGURE B.73: *Pressure error*

FIGURE B.74: *Y-velocity*

B.1.7 Simulation 6 : simulation sur maillage adapté au domaine

Le maillage redevient ici plutôt grossier : 15×5 mailles. Néanmoins, les mailles sont soit entièrement fluides, soit totalement solides ($\epsilon_i = 0$ ou 1). Les mailles fluides ont toutes au moins une voisine solide, et inversement (voir FIGURE B.75).

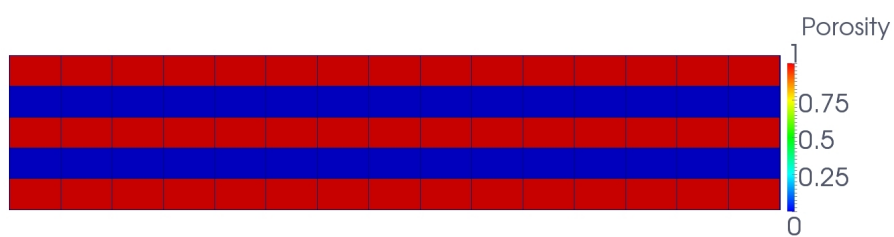
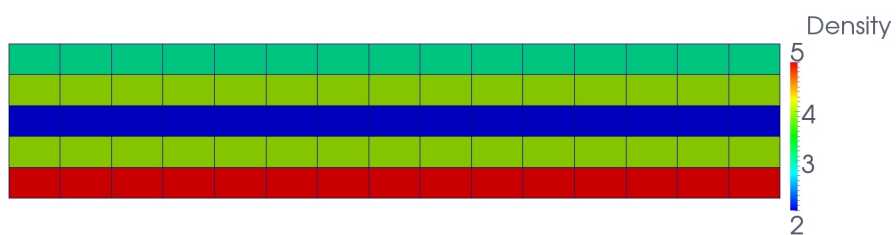
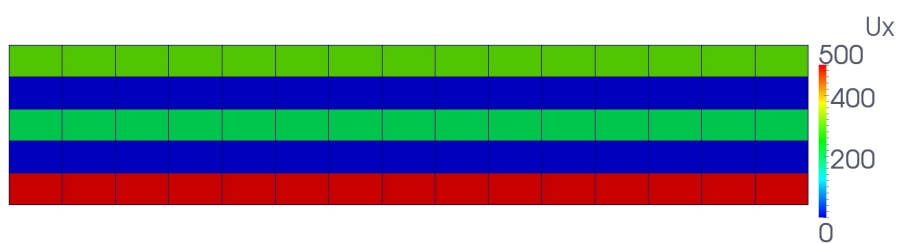
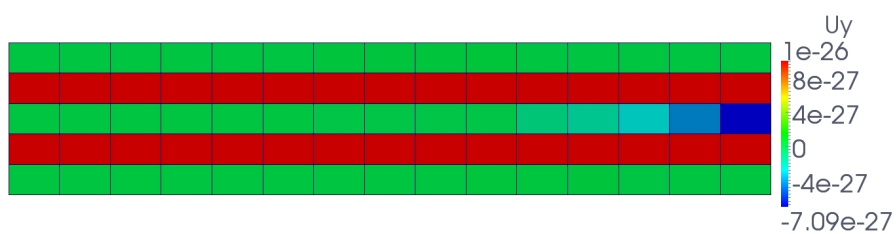
FIGURE B.75: *En rouge, le maillage composé de 15×5 cellules superposé au domaine géométrique.*

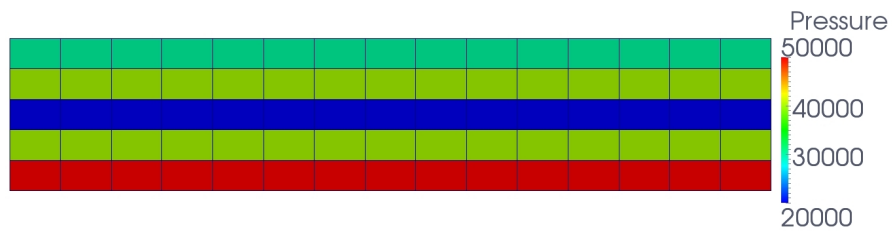
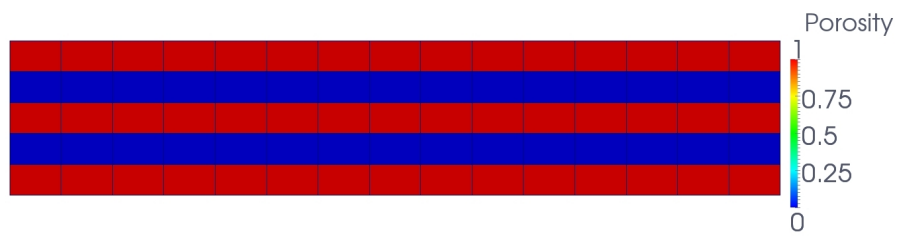
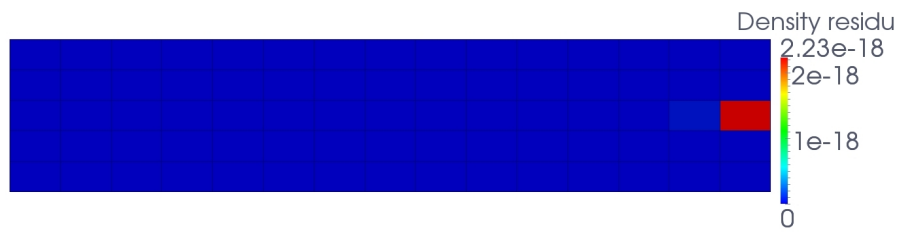
La finalité de ce maillage est de tester le bon comportement du préprocesseur au moment de définir si une surface est fluide ou solide.

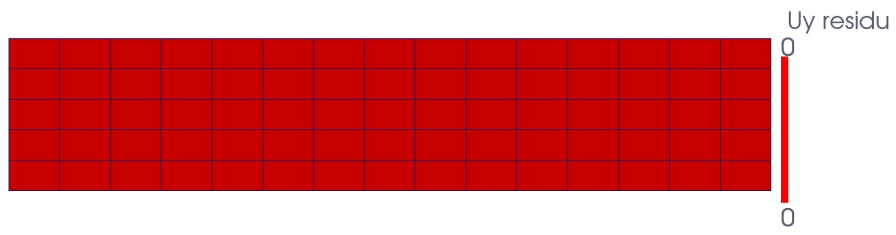
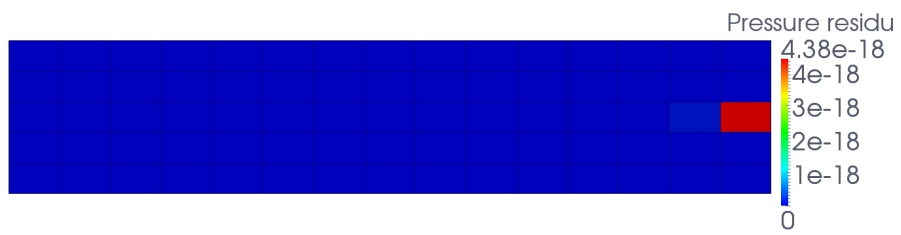
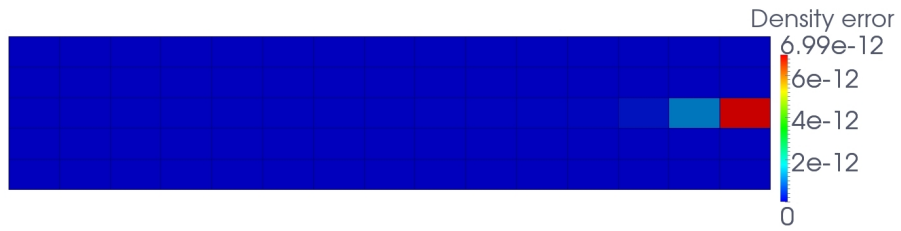
Les conditions initiales des mailles fluides et solides sont toujours les mêmes : $\underline{W}_i^0 = (\rho_i^0, u_i^0, v_i^0, P_i^0) = (1, 0, 0, 10^4)$ et $\underline{W}_i^s = (\rho_i^s, u_i^s, v_i^s, P_i^s) = (4, 0, 1, 4 \cdot 10^4)$.

Les conditions d'entrée sont également les mêmes que précédemment :

$$\underline{W}_1^E = \begin{pmatrix} 3 \\ 300 \\ 0 \\ 3 \cdot 10^4 \end{pmatrix} ; \underline{W}_2^E = \begin{pmatrix} 2 \\ 200 \\ 0 \\ 2 \cdot 10^4 \end{pmatrix} ; \underline{W}_3^E = \begin{pmatrix} 5 \\ 500 \\ 0 \\ 5 \cdot 10^4 \end{pmatrix}$$

FIGURE B.76: *Porosity*FIGURE B.77: *Density*FIGURE B.78: *X-velocity*FIGURE B.79: *Y-velocity bis*

FIGURE B.80: *Pressure*FIGURE B.81: *Mach*FIGURE B.82: *Density residu*FIGURE B.83: *X-velocity residu*

FIGURE B.84: *Y-velocity residu*FIGURE B.85: *Pressure residu*FIGURE B.86: *Density error*FIGURE B.87: *X-velocity error*

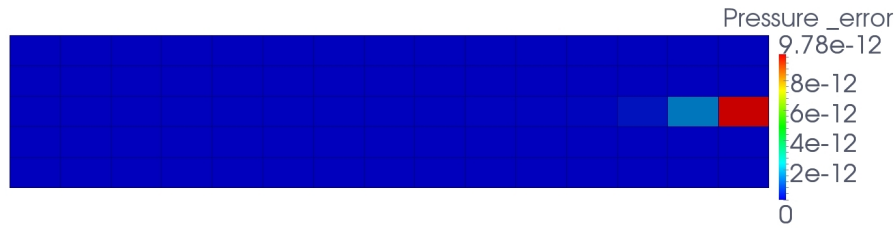


FIGURE B.88: Pressure error

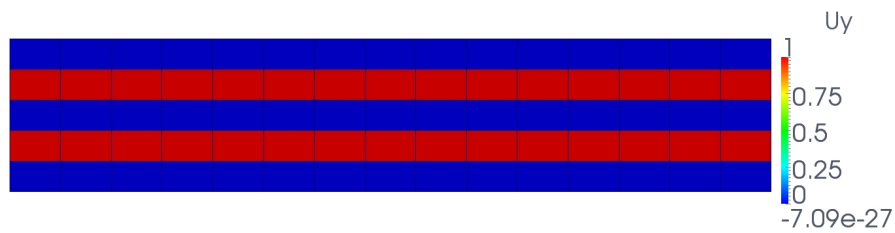
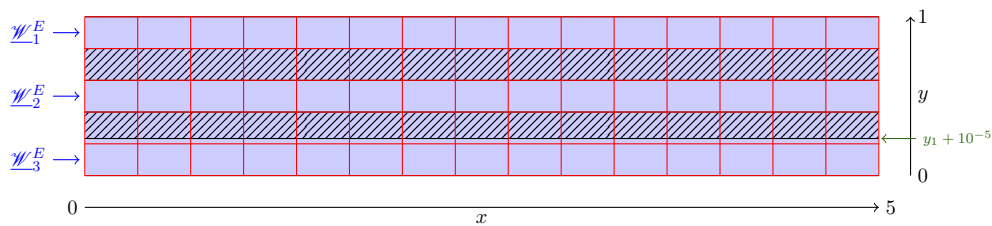


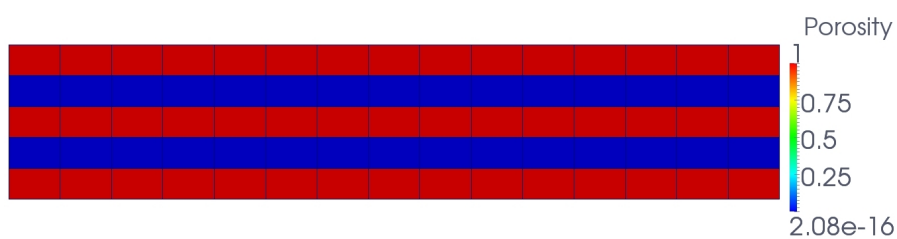
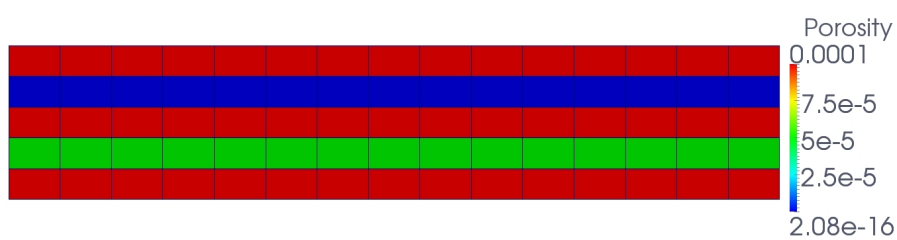
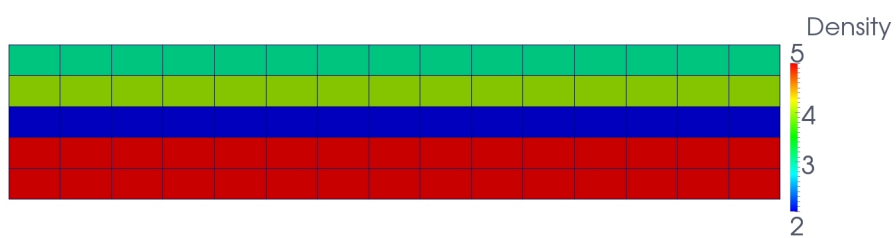
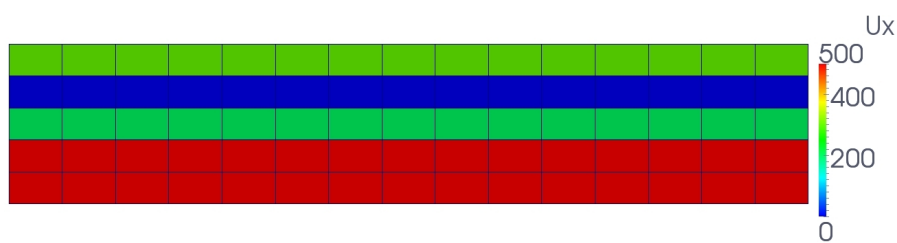
FIGURE B.89: Y-velocity

B.1.8 Simulation 7 : robustesse du code lors de la présence de faibles taux de porosité

On souhaite tester la robustesse du code lorsqu'une ou plusieurs cellules poreuses ont un taux de porosité très faible, relativement au volume totale de celles-ci. Pour cela, on travaille avec le même maillage que dans le cas B.1.7, avec 15×5 cellules. La nouveauté vient de la géométrie elle-même. En effet, on a déplacé l'une des bornes d'un des internes, comme montré sur la FIGURE B.90 (déplacement légèrement exagéré par rapport à la réalité).

FIGURE B.90: En rouge, le maillage composé de 15×5 cellules superposé au domaine géométrique modifié.

Le bord inférieur de l'interne du bas a été remonté de 10^{-5} , ce qui donne aux cellules présentes dans cette zone un taux de porosité faible mais non négligeable $\epsilon_i = \frac{1}{3} \times 10^{-5}$, tandis que le volume total de chaque cellule est de $\Omega_i = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$. Ceci engendre des pas de temps très petits.

FIGURE B.91: *Porosity*FIGURE B.92: *Porosity bis*FIGURE B.93: *Density*FIGURE B.94: *X-velocity*

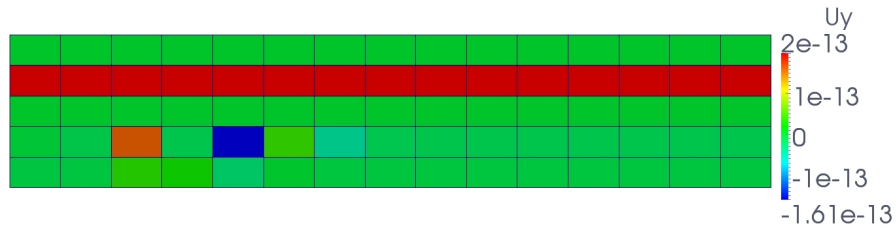


FIGURE B.95: Y-velocity - La légende est restreinte autour du minimum des valeurs. La vitesse vaut 1 dans les cellules solides.

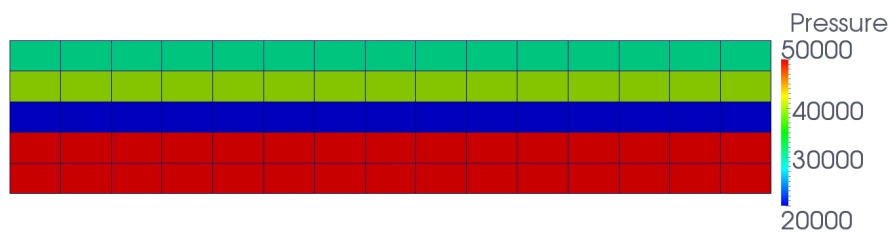


FIGURE B.96: Pressure

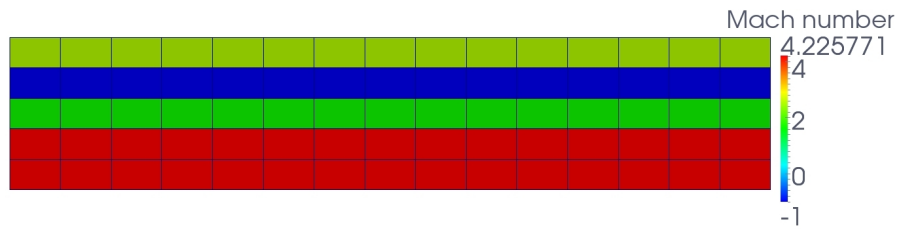


FIGURE B.97: Mach

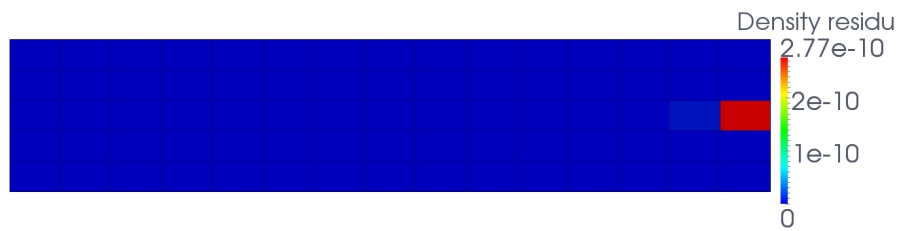


FIGURE B.98: Density residu

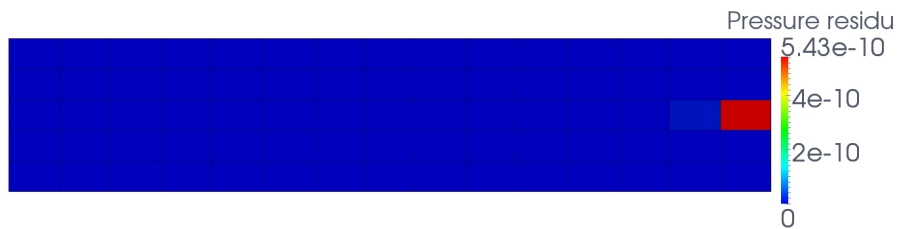
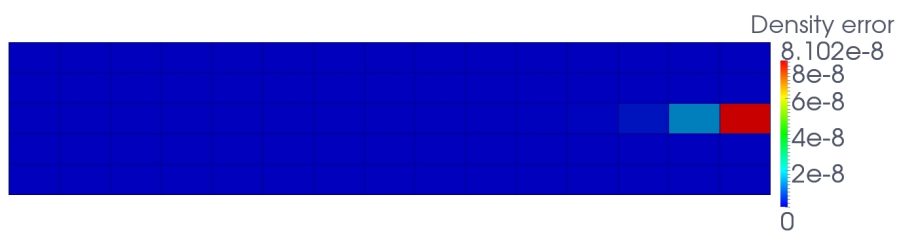
FIGURE B.99: *X-velocity residu*FIGURE B.100: *Y-velocity residu*FIGURE B.101: *Pressure residu*FIGURE B.102: *Density error*



FIGURE B.103: X-velocity error

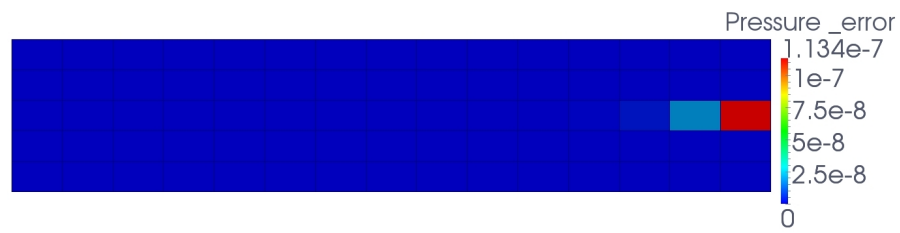


FIGURE B.104: Pressure error

B.2 Second cas test - Simulation d'écoulement fluide dans un conduit à transition milieu fluide / milieu poreux.

B.2.1 L'expérience.

On souhaite simuler un écoulement stationnaire dans un canal infini en amont et en aval. La partie amont du canal est libre tandis que la zone aval est encombrée. La zone poreuse est encombrée de deux internes solides non poreux et non perméables similaires à des barres. La transition du milieu fluide vers milieu poreux est « instantannée » (voir FIGURE B.105).

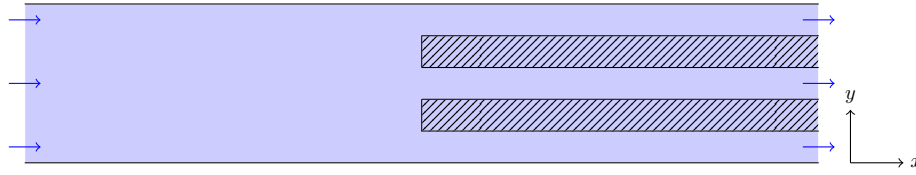


FIGURE B.105: Modèle transition fluide poreux. Le domaine est infini vers la gauche et vers la droite. Les internes sont infinies vers la droite.

On cherche à obtenir un écoulement stationnaire et uniforme (vitesse transverse nulle) vers l'infini à gauche et vers l'infini à droite. Les données connues sont les sections S_1 et S_2 et l'état du fluide en amont $(\rho_1, \underline{U}_1, P_1)$ (voir FIGURE B.106). L'inconnue principale est donc $(\rho_2, \underline{U}_2, P_2)$.

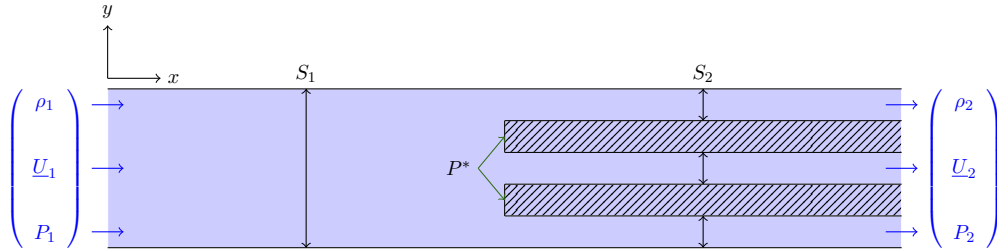


FIGURE B.106: Modèle transition fluide poreux. Le domaine est infini vers la gauche et vers la droite. Les internes sont infinies vers la droite.

Le premier objectif est d'approximer analytiquement l'inconnue $(\rho_2, \underline{U}_2, P_2)$ paramétrée par la pression pariétale évaluée P_{eval}^* . On comparera ensuite la pression pariétale évaluée P_{eval}^* à la pression pariétale calculée P_{calc}^* sur maillage fin. Enfin, le dernier objectif est la comparaison de $(\rho_2, \underline{U}_2, P_2)$ sur maillage grossier.

La sortie (par la droite du domaine) du fluide est libre. On impose en entrée (par la

gauche du domaine) un flux aux faces de bord

$$\mathcal{W}^E = (\rho^E, u^E, v^E, P^E) = (5, 500, 0, 5 \cdot 10^4)$$

Imposer un flux si brutalement en entrée devient problématique dès lors que des ondes reviennent en sens contraire. C'est d'ailleurs le cas des ondes réfléchies impactant le bord des internes. On espère pourtant obtenir un écoulement stationnaire. On souhaite du moins réussir à saisir une zone stationnaire autour de la transition entre les deux milieux. Pour cela, lors de la simulation, on allonge « au maximum » la partie amont du domaine, de sorte à imposer un flux le plus en amont possible et à laisser le temps aux ondes de remonter le canal.

Le domaine de simulation est le suivant : $[-15; 5] \times [0; 1]$. La transition « milieu fluide/milieu poreux » a lieu en $x = 2.5$ (voir FIGURE B.107). La zone de stationnarité visée est quant à elle la suivante : $[0; 5] \times [0; 1]$.

Les cellules fluides sont toutes identiquement initialisées :

$$\underline{W}_i^0 = (\rho_i^0, \underline{U}_i^0, P_i^0) = (1, \underline{0}, 10^4)$$

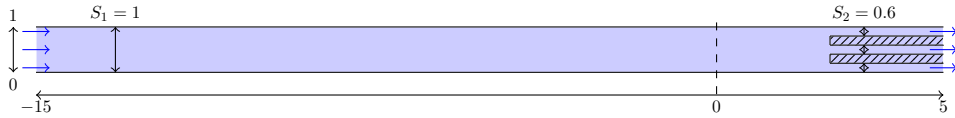
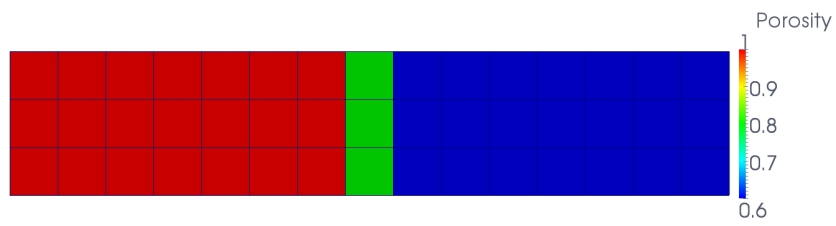
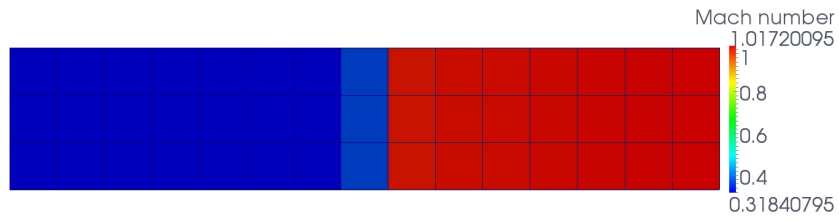
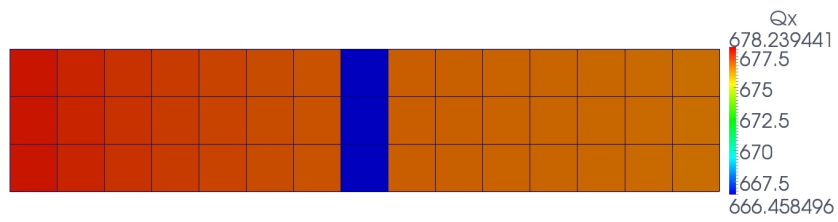
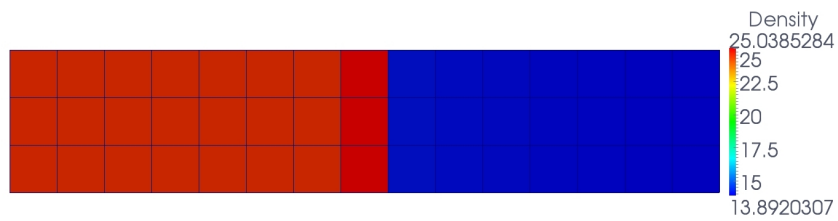
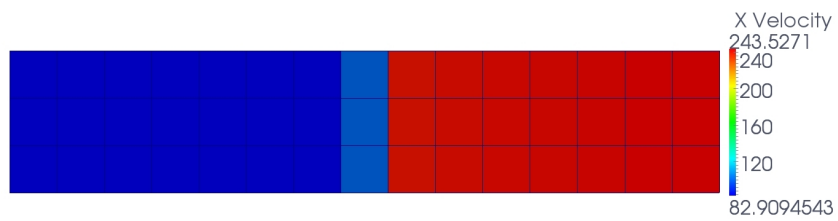


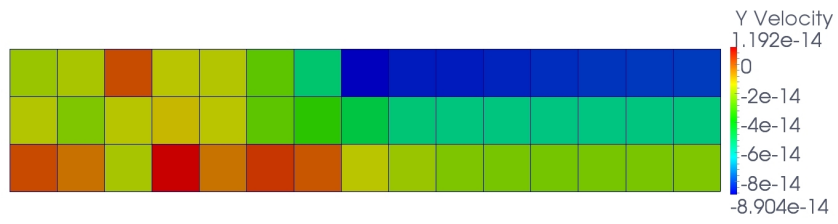
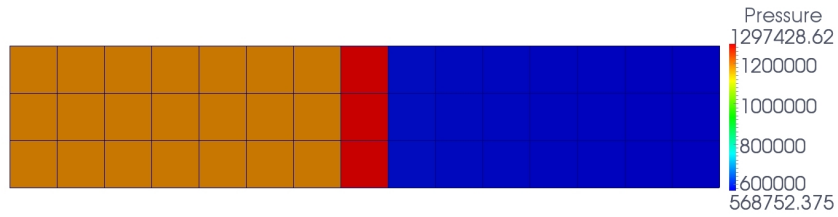
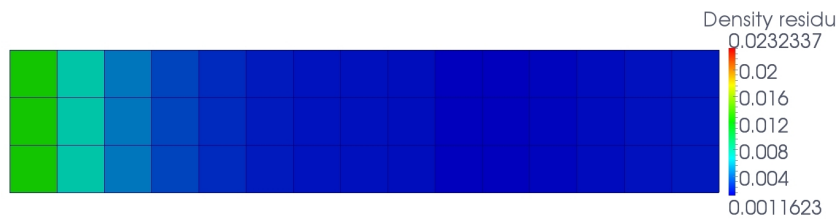
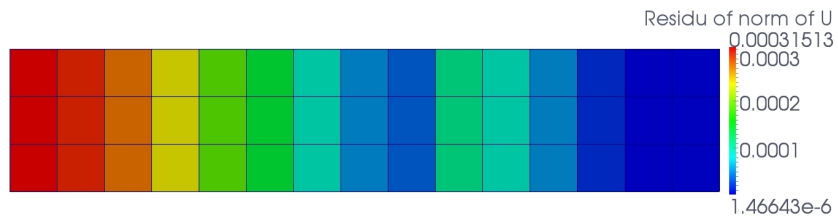
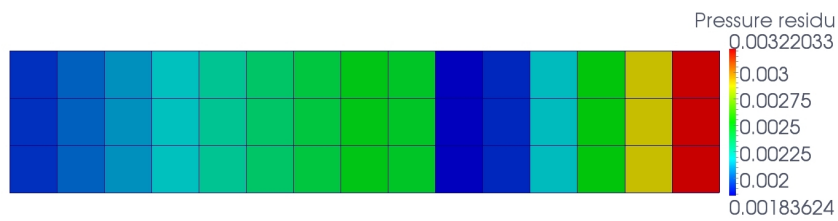
FIGURE B.107

B.2.2 Simulation 1 : calcul sur maillage grossier

On considère un maillage composé de 60x3 mailles, superposé au domaine de simulation $[-15; 5] \times [0; 1]$. On compte alors 15x3 cellules sur la zone d'intérêt stationnaire $[0; 5] \times [0; 1]$.

Les résultats sont obtenus au moment où les ondes réfléchies ont remonté le canal. On ne se focalise que sur la zone « stationnaire ».

FIGURE B.108: *Porosity*FIGURE B.109: *Mach*FIGURE B.110: *Debit*FIGURE B.111: *Density*FIGURE B.112: *X-velocity*

FIGURE B.113: *Y-velocity*FIGURE B.114: *Pressure*FIGURE B.115: *Density residu*FIGURE B.116: *norme(velocity) residu*FIGURE B.117: *Pressure residu*

B.2.3 Simulation 2 : calcul sur maillage adapté

On considère un maillage composé de 64×5 mailles, superposé au domaine de simulation $[-15; 5] \times [0; 1]$. On compte alors 16×5 cellules sur la zone d'intérêt stationnaire $[0; 5] \times [0; 1]$.

Les résultats sont obtenus au moment où les ondes réfléchies ont remonté le canal. On ne se focalise que sur la zone « stationnaire ».

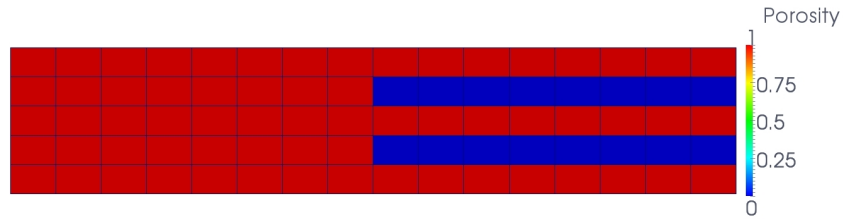


FIGURE B.118: Porosity

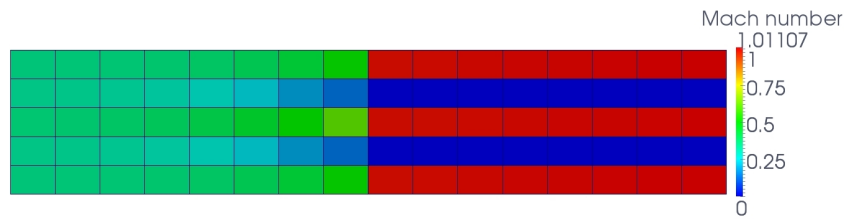


FIGURE B.119: Mach

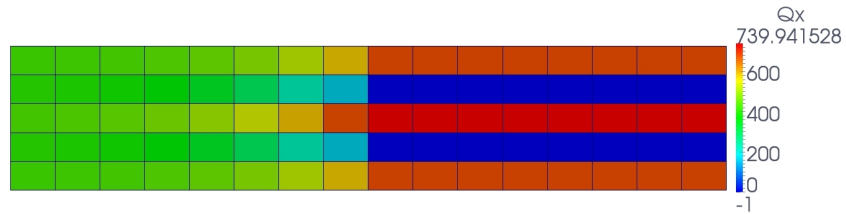


FIGURE B.120: Debit

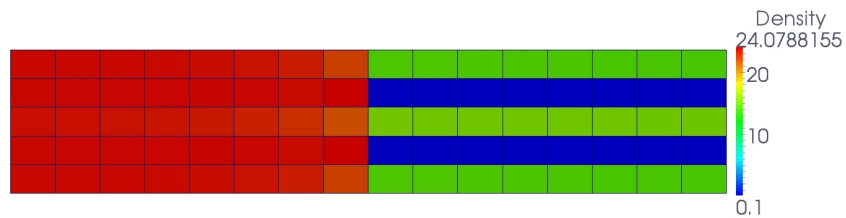
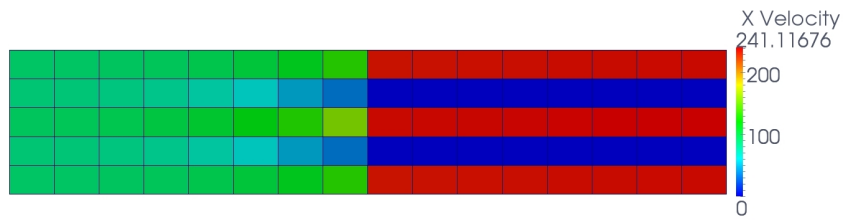
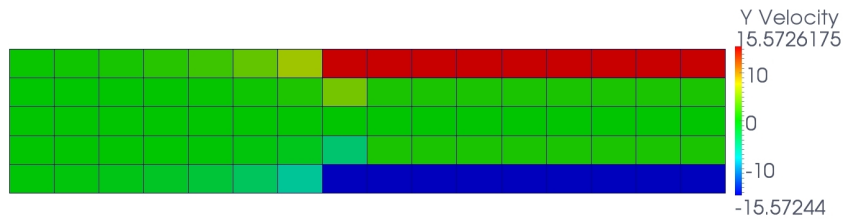
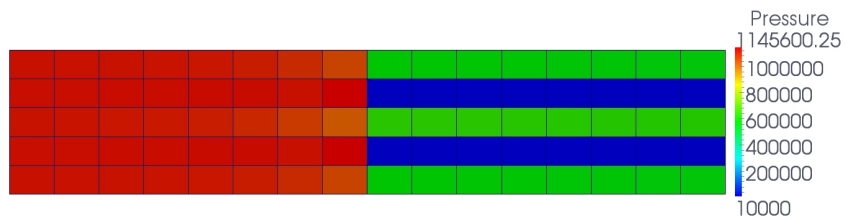
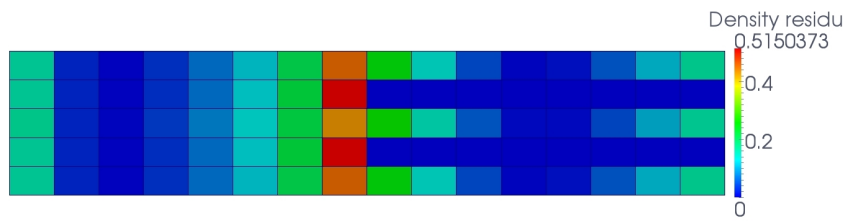
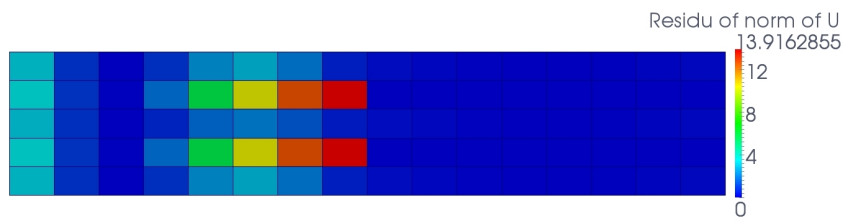
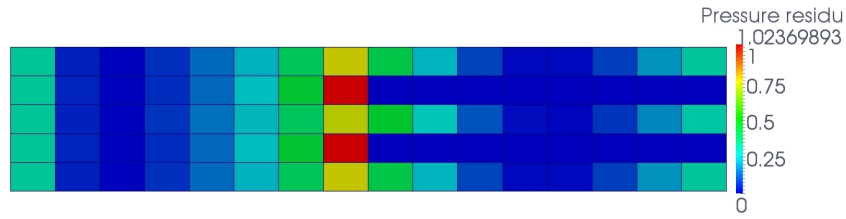


FIGURE B.121: Density

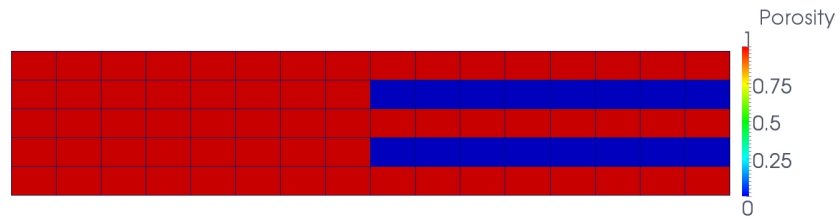
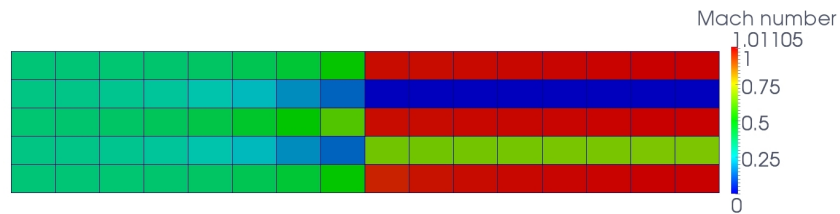
FIGURE B.122: *X-velocity*FIGURE B.123: *Y-velocity*FIGURE B.124: *Pressure*FIGURE B.125: *Density residu*FIGURE B.126: *norme(velocity) residu*

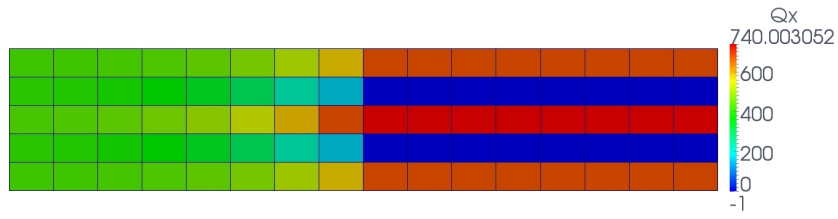
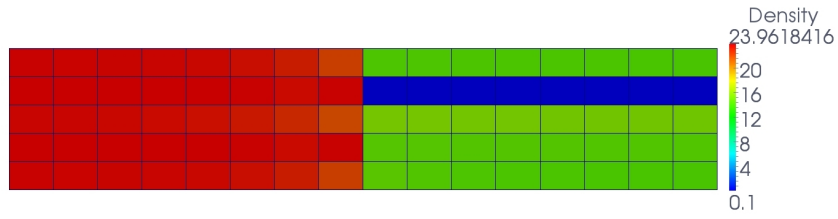
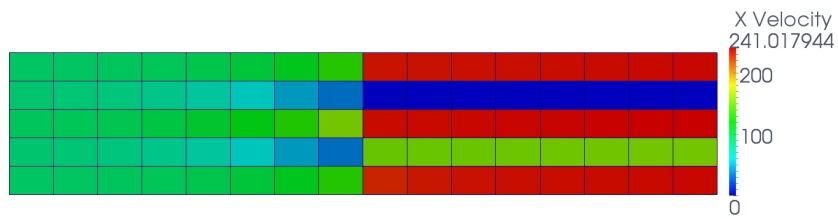
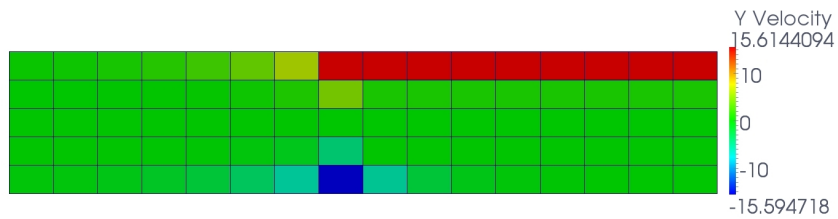
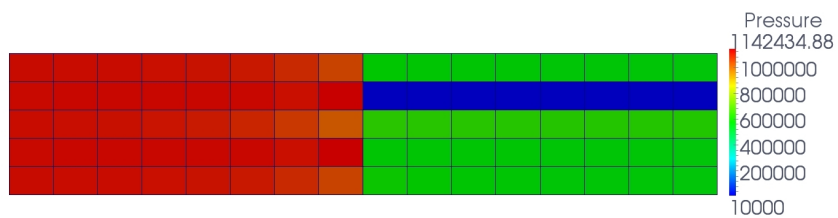
FIGURE B.127: *Pressure residu*

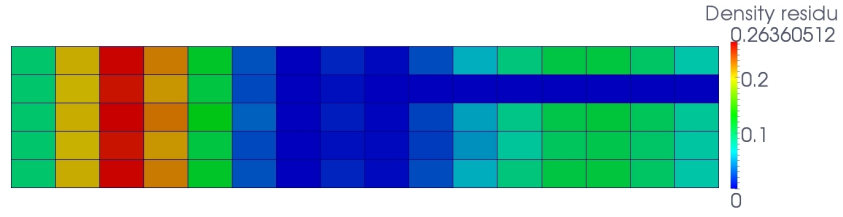
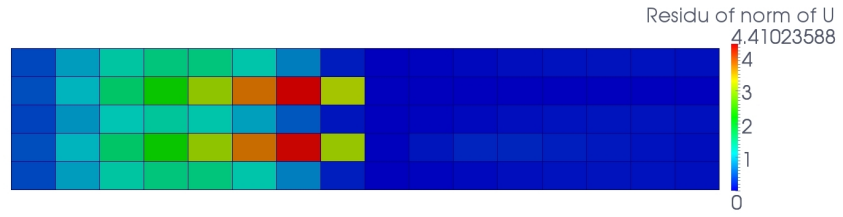
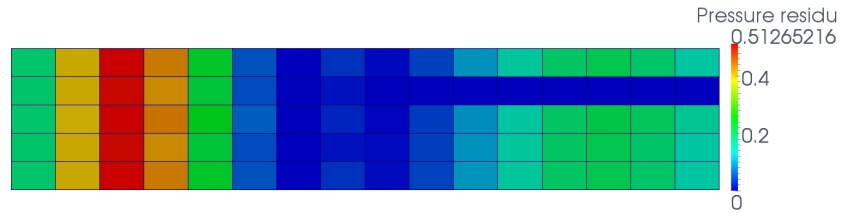
B.2.4 Simulation 3 : calcul sur maillage adapté, avec test de robustesse

On considère le même maillage que pour B.2.3 composé de 64×5 mailles, superposé au domaine de simulation $[-15; 5] \times [0; 1]$. On compte alors 16×5 cellules sur la zone d'intérêt stationnaire $[0; 5] \times [0; 1]$. Néanmoins, cette fois ci, le bord inférieur de l'interne du bas est légèrement remonté de 10^{-5} .

Les résultats sont obtenus au moment où les ondes réfléchies ont remonté le canal. On ne se focalise que sur la zone « stationnaire ».

FIGURE B.128: *Porosity*FIGURE B.129: *Mach*

FIGURE B.130: *Debit*FIGURE B.131: *Density*FIGURE B.132: *X-velocity*FIGURE B.133: *Y-velocity*FIGURE B.134: *Pressure*

FIGURE B.135: *Density residu*FIGURE B.136: *norme(velocity) residu*FIGURE B.137: *Pressure residu*

B.2.5 Simulation 4 : calcul sur maillage adapté, avec un second test de robustesse

On considère le même maillage que pour B.2.3 composé de 64×5 mailles, superposé au domaine de simulation $[-15; 5] \times [0; 1]$. On compte alors 16×5 cellules sur la zone d'intérêt stationnaire $[0; 5] \times [0; 1]$. Néanmoins, cette fois ci, le début des internes est situé 10^{-5} plus à droite.

Les résultats sont obtenus au moment où les ondes réfléchies ont remonté le canal. On ne se focalise que sur la zone « stationnaire ».

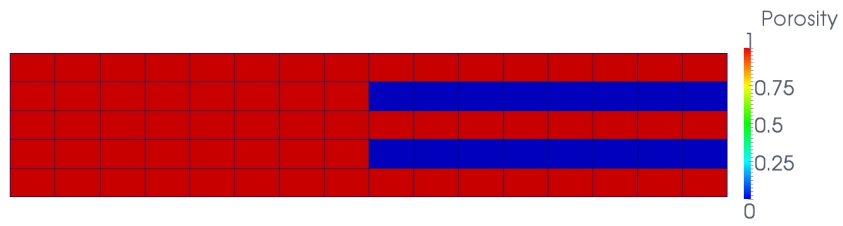


FIGURE B.138: Porosity

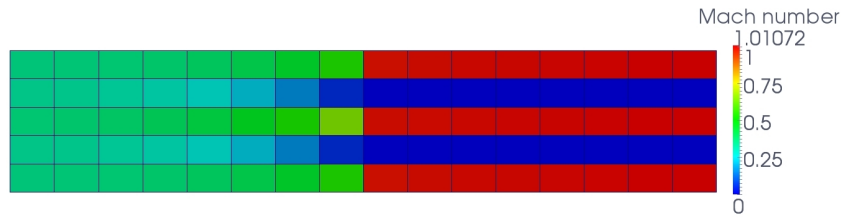


FIGURE B.139: Mach

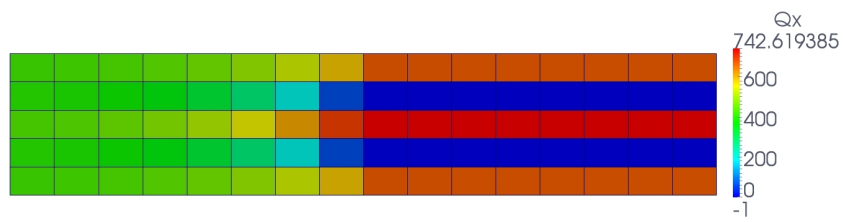


FIGURE B.140: Debit

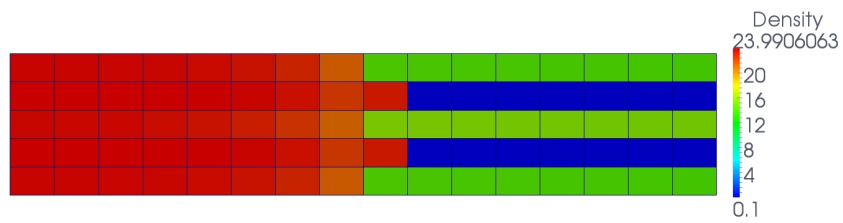


FIGURE B.141: Density

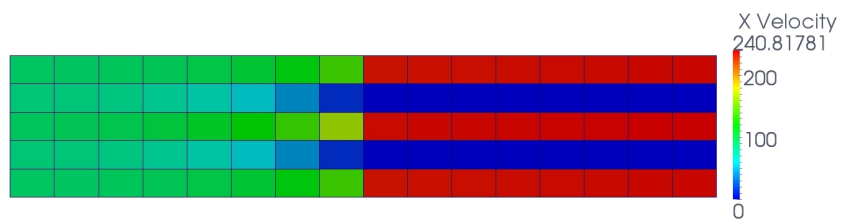
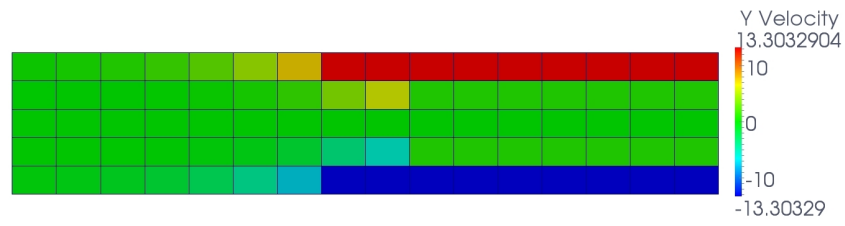
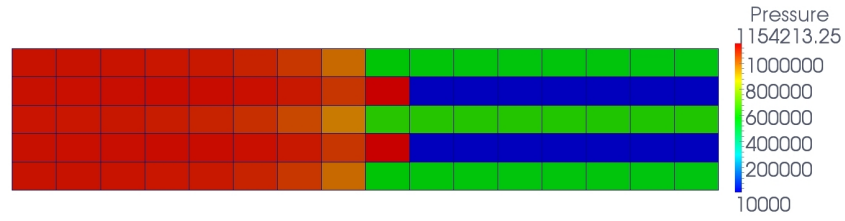
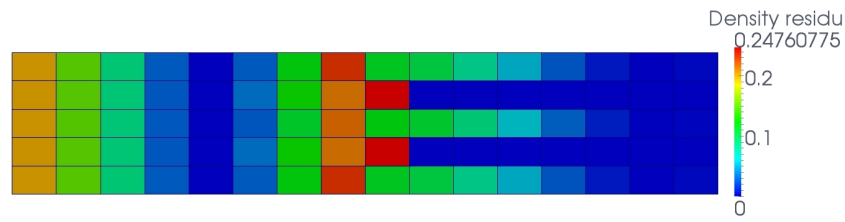
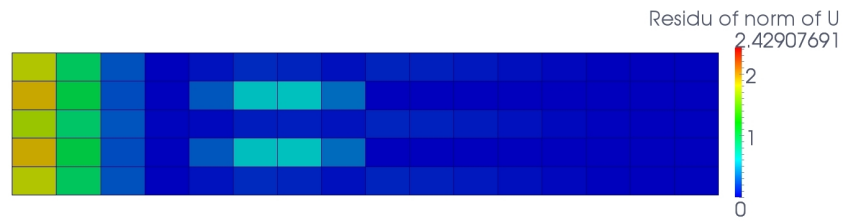
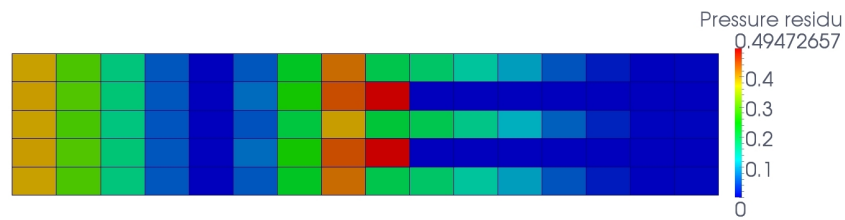


FIGURE B.142: X-velocity

FIGURE B.143: *Y-velocity*FIGURE B.144: *Pressure*FIGURE B.145: *Density residu*FIGURE B.146: *norme(velocity) residu*FIGURE B.147: *Pressure residu*

B.2.6 Simulation 5 :

On considère un maillage composé de 240×14 mailles, superposé au domaine de simulation $[-15; 5] \times [0; 1]$. On compte alors 60×14 cellules sur la zone d'intérêt stationnaire $[0; 5] \times [0; 1]$.

Les résultats sont obtenus au moment où les ondes réfléchies ont remonté le canal. On ne se focalise que sur la zone « stationnaire ».

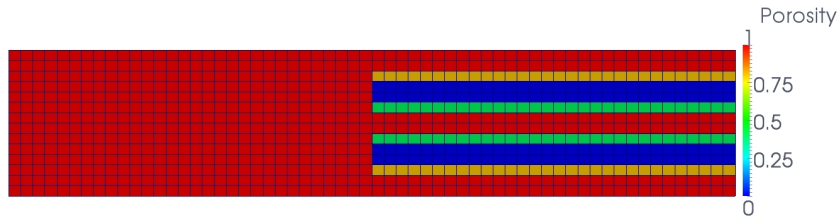


FIGURE B.148: Porosity

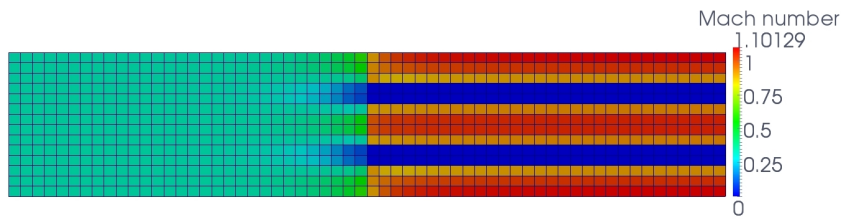


FIGURE B.149: Mach

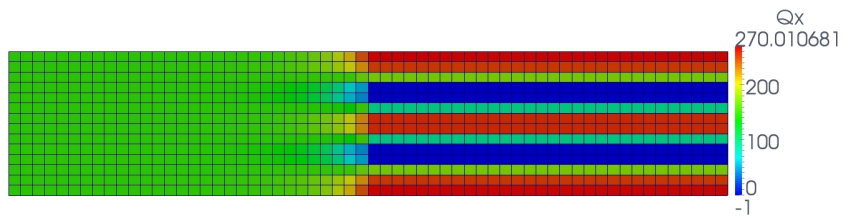


FIGURE B.150: Debit

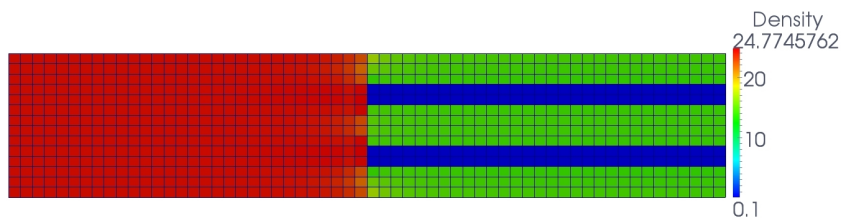
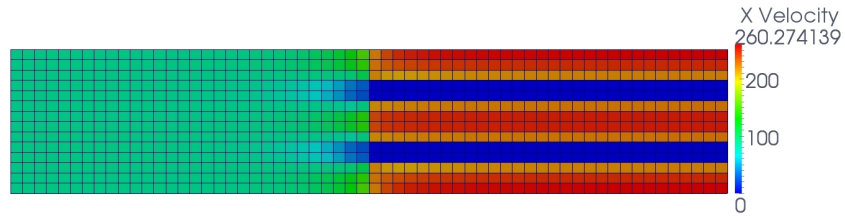
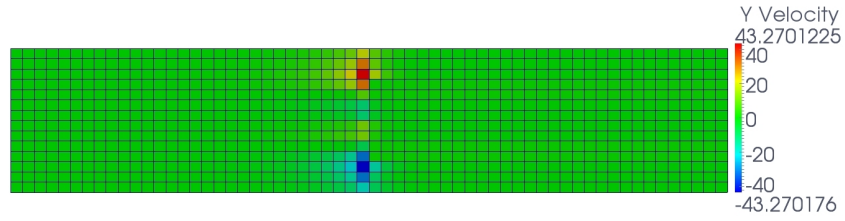
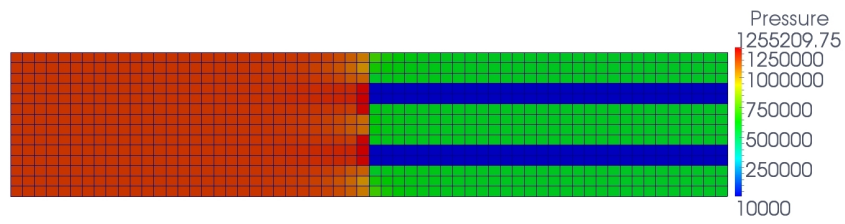
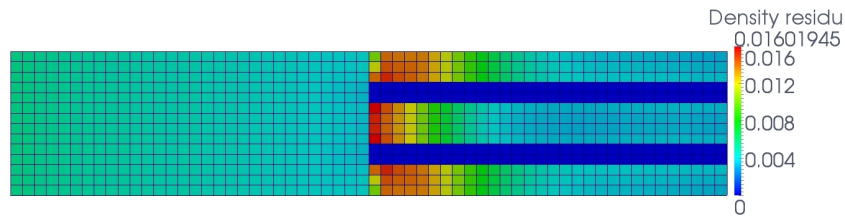
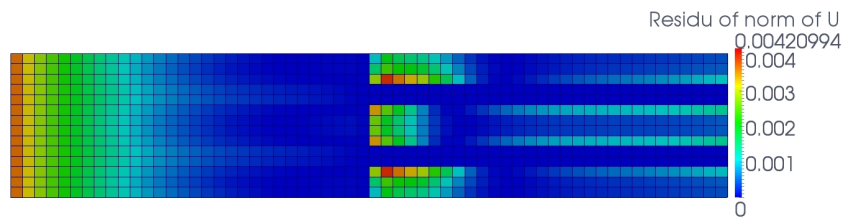
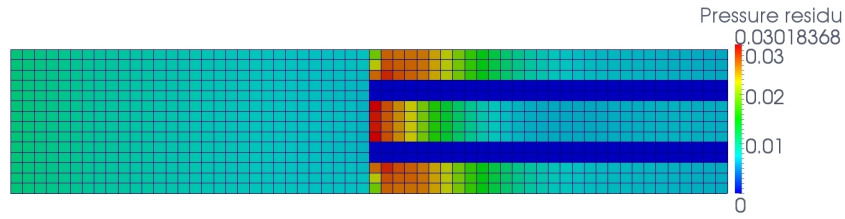


FIGURE B.151: Density

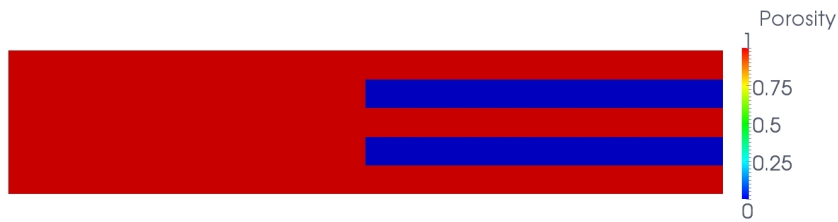
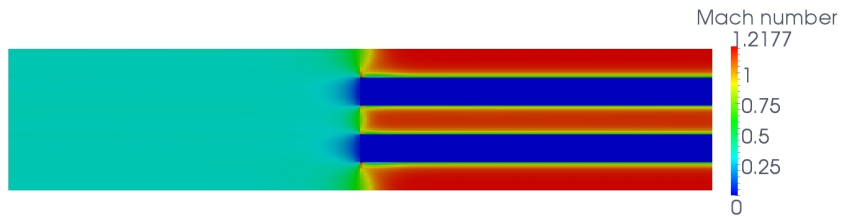
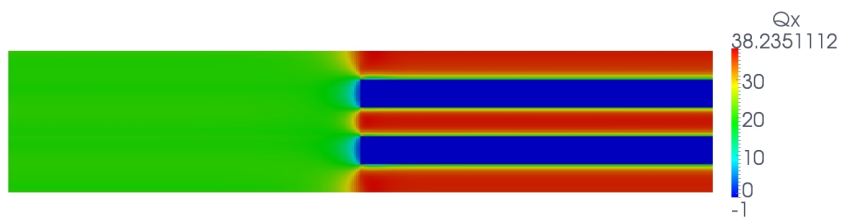
FIGURE B.152: *X-velocity*FIGURE B.153: *Y-velocity*FIGURE B.154: *Pressure*FIGURE B.155: *Density residu*FIGURE B.156: *norme(velocity) residu*

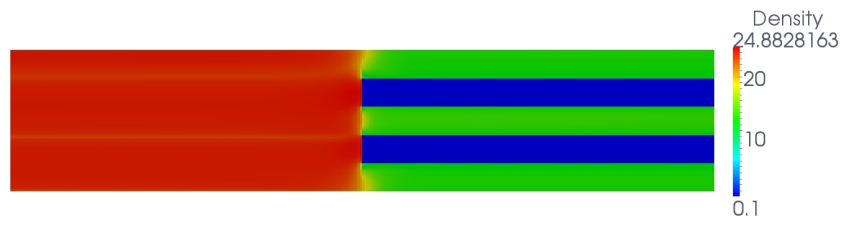
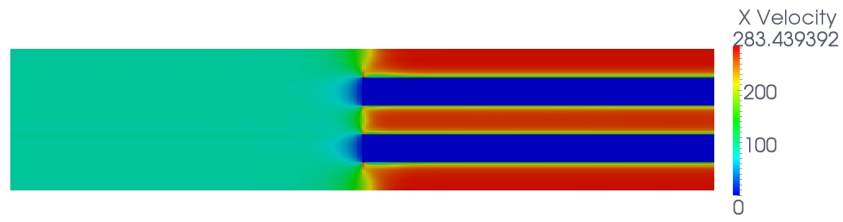
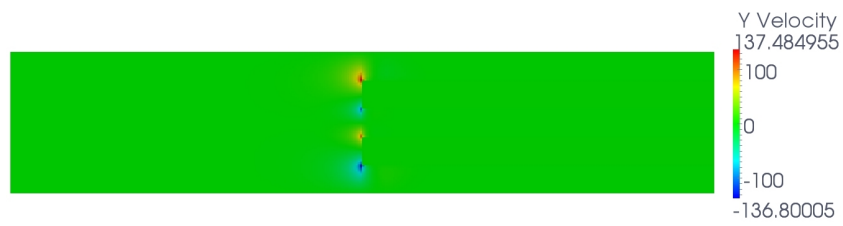
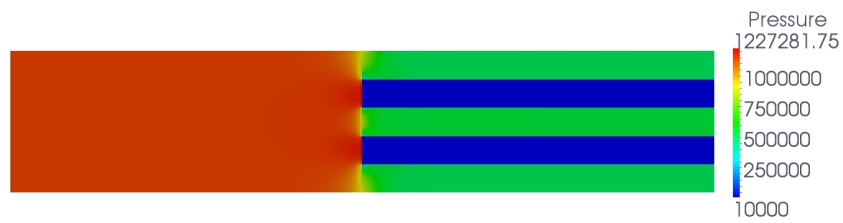
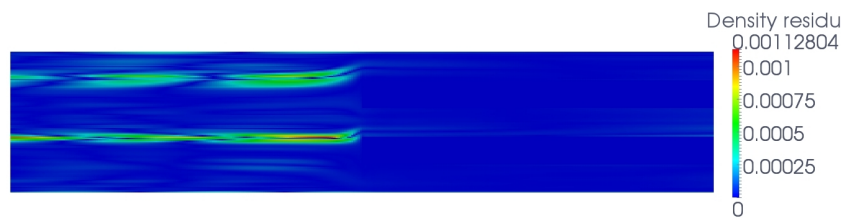
FIGURE B.157: *Pressure residu*

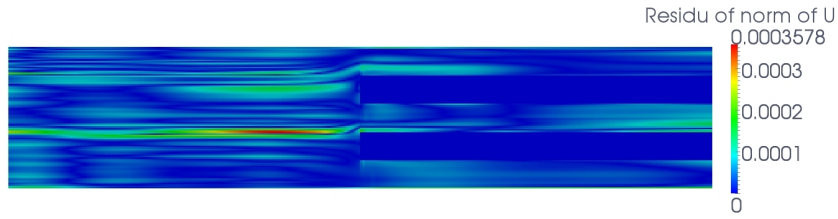
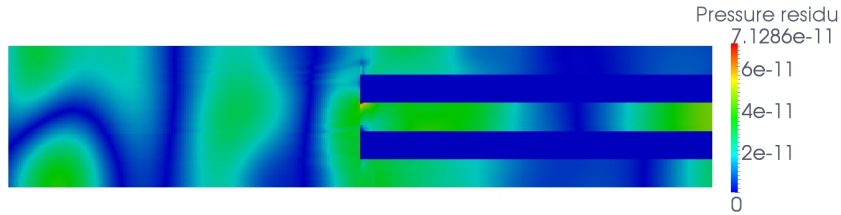
B.2.7 Simulation 6 :

On considère un maillage composé de 1280×100 mailles, superposé au domaine de simulation $[-15; 5] \times [0; 1]$. On compte alors 320×100 cellules sur la zone d'intérêt stationnaire $[0; 5] \times [0; 1]$.

Les résultats sont obtenus au moment où les ondes réfléchies ont remonté le canal. On ne se focalise que sur la zone « stationnaire ».

FIGURE B.158: *Porosity*FIGURE B.159: *Mach*FIGURE B.160: *Debit*

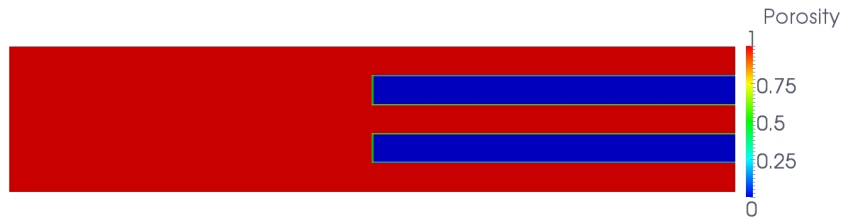
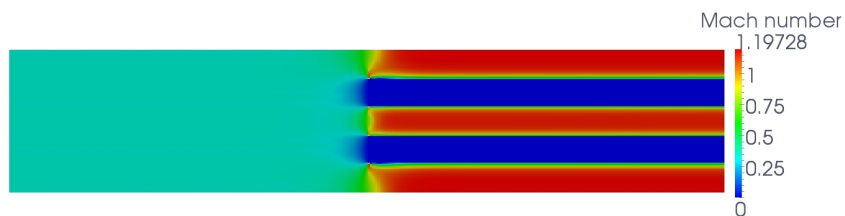
FIGURE B.161: *Density*FIGURE B.162: *X-velocity*FIGURE B.163: *Y-velocity*FIGURE B.164: *Pressure*FIGURE B.165: *Density residu*

FIGURE B.166: *norme(velocity) residu*FIGURE B.167: *Pressure residu*

B.2.8 Simulation 7 :

On considère un maillage composé de 1500×126 mailles, superposé au domaine de simulation $[-15; 5] \times [0; 1]$. On compte alors 375×126 cellules sur la zone d'intérêt stationnaire $[0; 5] \times [0; 1]$.

Les résultats sont obtenus au moment où les ondes réfléchies ont remonté le canal. On ne se focalise que sur la zone « stationnaire ».

FIGURE B.168: *Porosity*FIGURE B.169: *Mach*

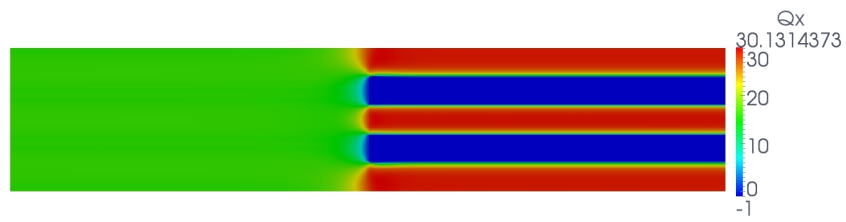
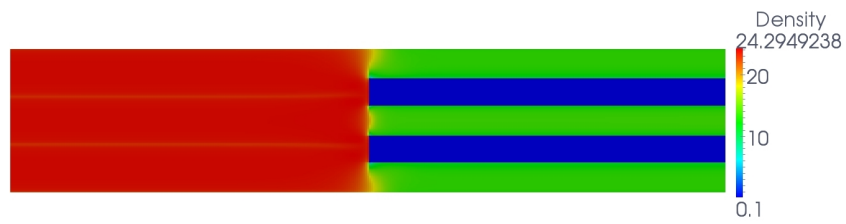
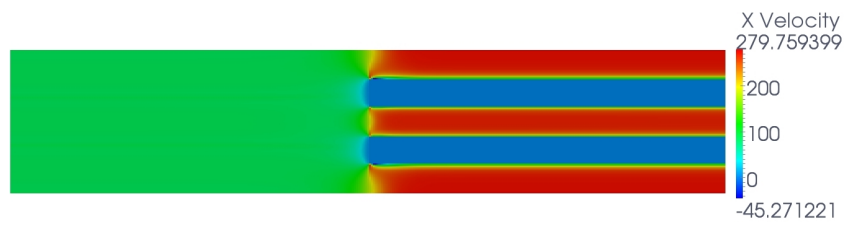
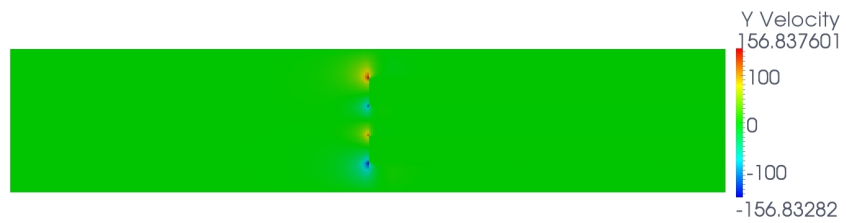
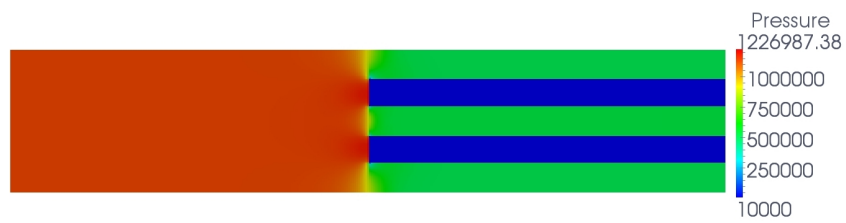
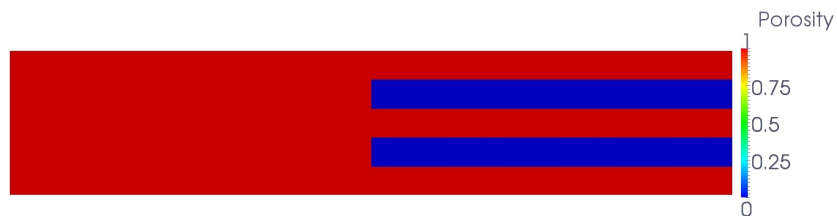
FIGURE B.170: *Debit*FIGURE B.171: *Density*FIGURE B.172: *X-velocity*FIGURE B.173: *Y-velocity*FIGURE B.174: *Pressure*

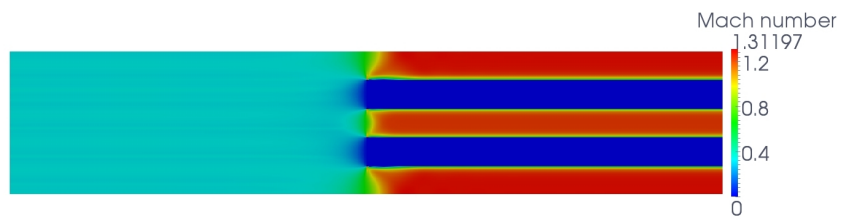
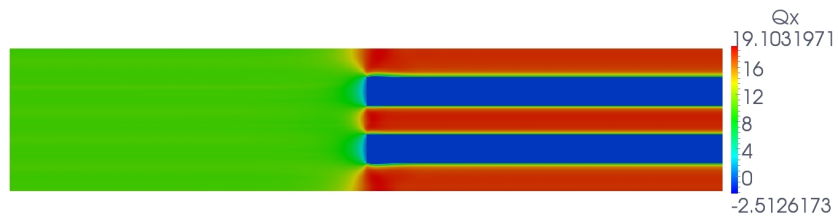
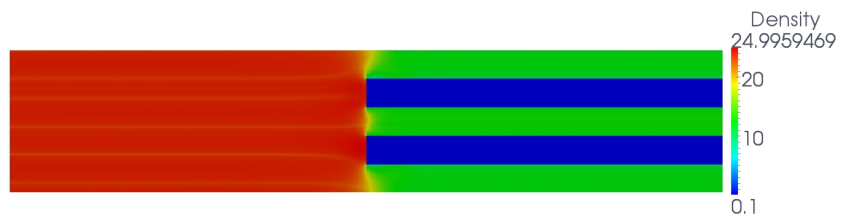
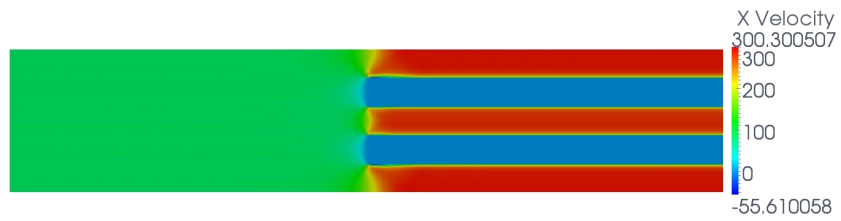
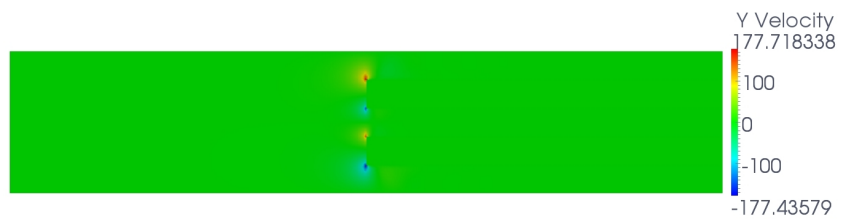
FIGURE B.175: *Density residu*FIGURE B.176: *norme(velocity) residu*FIGURE B.177: *Pressure residu*

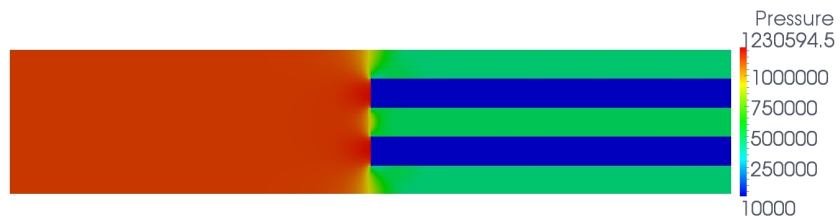
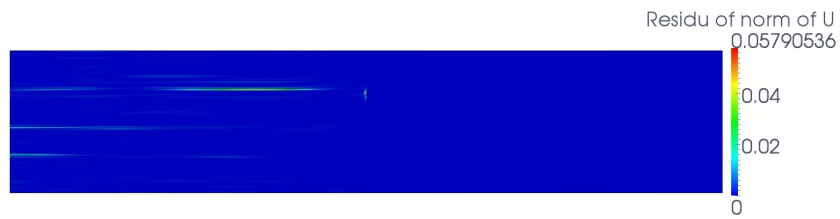
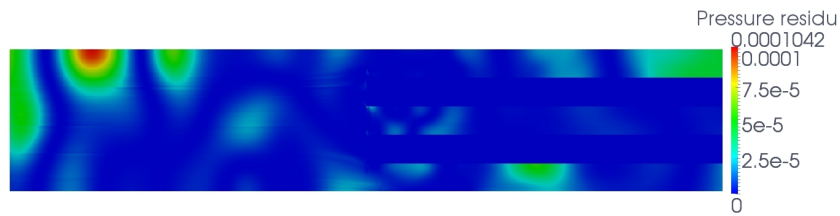
B.2.9 Simulation 8 :

On considère un maillage composé de 2560×200 mailles, superposé au domaine de simulation $[-15; 5] \times [0; 1]$. On compte alors 640×200 cellules sur la zone d'intérêt stationnaire $[0; 5] \times [0; 1]$.

Les résultats sont obtenus au moment où les ondes réfléchies ont remonté le canal. On ne se focalise que sur la zone « stationnaire ».

FIGURE B.178: *Porosity*

FIGURE B.179: *Mach*FIGURE B.180: *Debit*FIGURE B.181: *Density*FIGURE B.182: *X-velocity*FIGURE B.183: *Y-velocity*

FIGURE B.184: *Pressure*FIGURE B.185: *Density residu*FIGURE B.186: *norme(velocity) residu*FIGURE B.187: *Pressure residu*

Chapitre 3 :

Une formulation intégrale implicite pour la modélisation d'écoulements fluides en milieu encombré d'ob- stacles

Une formulation intégrale implicite pour la modélisation d'écoulements fluides en milieu encombré d'obstacles*

M. FERRAND, J.-M. HÉRARD, E. LE COUPANEC, X. MARTIN

November 25, 2015

1 Introduction

Pour représenter les écoulements de fluide dans certains composants d'une centrale nucléaire utilisant le concept de réacteur à eau pressurisée, plusieurs échelles de représentation sont aujourd'hui présentes : l'échelle "système", l'échelle "composant" et l'échelle locale. La première a pour vocation de proposer des simulations du circuit primaire complet, incluant de nombreux éléments technologiques, et intégrant des descriptions $0D$ et unidimensionnelles, le nombre de mailles total pour décrire le circuit complet devant être compatible avec une simulation en temps réel. La troisième échelle, communément appelée échelle CFD, et classique en mécanique des fluides, a pour objectif de donner une représentation fine, mais dans un domaine physique de taille restreinte, de l'écoulement du fluide caloporteur. L'échelle intermédiaire "composant", introduite et développée dans les années 80, s'attache à proposer une représentation homogénéisée de certains composants tels que le générateur de vapeur, le coeur de réacteur ou certains autres organes de grande taille. Cette approche (voir par exemple [7], [3], [12], [19]) est très utile. Elle consiste à intégrer dans les "mailles de calcul", un volume fluide et un volume solide, ce qui permet une description d'un coeur de réacteur où la dimension caractéristique inter-canaux est inférieure au centimètre, sachant que la taille de maille retenue pour un calcul est nettement supérieure, du fait des dimensions globales. Cette approche est bien adaptée aux calculs courants, et était totalement légitimée par la taille et la puissance des ordinateurs à l'époque où les codes "composant" furent conçus. Cependant, les codes associés ne sont pas exempts d'imperfections (notamment pour la prise en compte de zones de transition contenant des interfaces fluide/poreux nettement marquées, ou pour le couplage interfacial de codes correspondant aux deux échelles extrêmes) ; en outre, en se projetant vers un futur proche doté d'ordinateurs de puissance encore nettement supérieure, ils posent le problème de cohérence de représentation entre les différentes échelles.

Ceci a motivé l'analyse d'une représentation sensiblement distincte, qui englobe les échelles locale et "composant" au sein d'un même concept d'une part,

*Note interne EDF R&D H-I83-2015-05276-FR

et assure par construction, asymptotiquement en temps, la cohérence entre les différentes échelles. Cette approche a été suggérée et développée dans le cadre du document [15], sachant que les solveurs fluides introduits dans ce document sont de type explicite et donc plus adaptés à un contexte de dynamique rapide. On souhaite donc dans ce document procéder au développement et au test de l’approche intégrale, basée sur les équations locales instantanées (de type Navier-Stokes ou Euler), mais en adoptant un profil de schémas plus adapté au cadre des écoulements à faible nombre de Mach, en s’appuyant sur le code *Code_Saturne* (cf. [2, 1, 17, 16]) développé à EDF R&D, qui utilise des schémas implicites.

Ce rapport débutera donc par la description du modèle d’équations considéré décrivant le comportement d’un fluide compressible non visqueux. Après avoir défini le système, on s’appuiera sur l’approche intégrale décrite dans la note interne EDF [15] pour construire la formulation intégrale en milieu encombré d’obstacles. Dans la section 3, seront détaillées les étapes du schéma implicite en temps à pas fractionnaires (voir pour les bases de ces méthodes le livre [20]) et adapté à la formulation intégrale poreuse présentée ici. La section 4 sera quant à elle consacrée à la présentation des schémas en espace de type Volumes Finis (cf. [9]). Dans la 5ème section, on examinera les conditions garantissant la positivité de la densité et de la pression, ainsi que la conservativité en temps et en espace de l’algorithme. Certaines remarques importantes y seront formulées. La dernière section sera consacrée aux résultats numériques. On y décrira les différents cas tests de validation de l’algorithme, puis on discutera des différents résultats obtenus. Les approximations numériques obtenues grâce à la nouvelle approche seront en particulier comparées aux solutions du modèle exact sur maillage très fin et adapté aux internes du domaine (i.e. sans aucun volume de contrôle poreux).

2 Le modèle considéré

2.1 Les équations du modèle

Le système d’équations considéré régissant l’écoulement du fluide non visqueux est de type Euler :

$$\begin{cases} \partial_t \rho & + & \nabla \cdot \underline{Q} = 0 \\ \partial_t \underline{Q} & + & \nabla \cdot (\underline{u} \otimes \underline{Q}) + \nabla P = \rho \underline{f} \\ \partial_t E & + & \nabla \cdot (\underline{u}(E + P)) = \rho \underline{f} \cdot \underline{u} + \rho \Phi_v \end{cases} \quad (1)$$

où classiquement ρ représente la densité du fluide, \underline{u} la vitesse, $\underline{Q} = \rho \underline{u}$ le débit, P la pression et E l’énergie totale; \underline{f} représente les forces volumiques externes telles que la gravité et Φ_v un terme source d’apport externe de chaleur.

L’énergie totale E est quant à elle définie par l’équation suivante :

$$E = \rho \left(\frac{\underline{u}^2}{2} + \epsilon(P, \rho) \right)$$

où $\epsilon(P, \rho)$, associée à un modèle thermodynamique a priori "quelconque", représente l'énergie interne.

On note c la célérité des ondes acoustiques définie par :

$$c^2 = \left(\frac{P}{\rho^2} - \frac{\partial \epsilon(P, \rho)}{\partial \rho} \right) / \left(\frac{\partial \epsilon(P, \rho)}{\partial P} \right)$$

On définit également $h = \epsilon(P, \rho) + \frac{P}{\rho}$ l'enthalpie interne et H l'enthalpie totale telle que :

$$H = \frac{E + P}{\rho}$$

Dans toute la suite du chapitre, \underline{W} désignera la variable conservative :

$$\underline{W} = (\rho, \underline{Q}, E)^t$$

2.2 La formulation intégrale

On considère, comme cela est fait dans [15], une formulation intégrale des équations de bilan (1). On va donc intégrer le système d'équations (1) sur un volume de contrôle quelconque Ω_i pouvant contenir des obstacles. Il est possible pour un obstacle de se retrouver entièrement immergé dans le volume de contrôle, de le traverser partiellement ou en totalité. Il lui est également possible de partager une partie de sa surface avec le bord du volume de contrôle. Un ensemble de ces situations est représenté, comme exemple, sur la Figure 1.

Dans ce document l'exposant ϕ associé au double indice i/j fera référence à la zone fluide de l'interface ij séparant les deux volumes de contrôle voisins Ω_i et Ω_j . C'est la partie de la frontière que le fluide peut traverser. Cette surface de passage sera notée $\Gamma_{i/j}^\phi$, et on note $S_{i/j}^\phi$ sa mesure telle que $S_{i/j}^\phi = \text{mes}(\Gamma_{i/j}^\phi)$.

A l'opposé, l'exposant w associé à l'indice i fera référence à la zone où un bord solide est présent à l'intérieur ou bien sur la frontière du volume de contrôle Ω_i . La surface pariétale correspondante sera notée Γ_i^w et on notera S_i^w sa mesure telle que $S_i^w = \text{mes}(\Gamma_i^w)$; le flux de masse y sera nul.

On définit également le volume Ω_i^ϕ occupé par le fluide à l'intérieur du volume de contrôle Ω_i .

Statistiquement, un "grand" volume de contrôle Ω_i peut contenir plusieurs sous-volumes fluides notés $\Omega_{i,k}^\phi$ ($k \in \{1, N(i)\}$, $N(i)$ représentant le nombre de sous-éléments) non connectés les uns aux autres, et séparés par la présence de relativement "petits" internes traversant Ω_i de part en part (internes de type (3) sur la Figure 1). Alors, à chaque sous-élément fluide $\Omega_{i,k}^\phi$ est affecté un unique état moyen fluide $\underline{W}_{i,k}$ de $\underline{W}(\mathbf{x}, t)$ tel que :

$$\underline{W}_{i,k}(t) = \frac{1}{\text{vol}(\Omega_{i,k}^\phi)} \left(\int_{\Omega_{i,k}^\phi} \underline{W}(\mathbf{x}, t) dx \right)$$

On introduit également la valeur moyenne \underline{W}_i de l'état du fluide dans toute la cellule Ω_i par :

$$\underline{W}_i(t) = \frac{1}{\text{vol}(\Omega_i^\phi)} \left(\int_{\Omega_i^\phi} \underline{W}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right)$$

La partie fluide Ω_i^ϕ du volume de contrôle n'est autre que l'ensemble des sous-éléments fluides de Ω_i . En ce sens, on a :

$$\Omega_i^\phi = \bigcup_{k \in \{1, N(i)\}} \Omega_{i,k}^\phi$$

et par consistance, on peut écrire :

$$\text{vol}(\Omega_i^\phi) = \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \text{vol}(\Omega_{i,k}^\phi)$$

On en déduit et réécrit alors la valeur moyenne de l'état du fluide :

$$\underline{W}_i(t) = \frac{1}{\text{vol}(\Omega_i^\phi)} \left(\sum_{k \in \{1, N(i)\}} \underline{W}_{i,k}(t) \text{vol}(\Omega_{i,k}^\phi) \right) \quad (2)$$

On considère maintenant la loi de conservation :

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{F}(\underline{W})) = \underline{D}(\underline{W}) \quad (3)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{W} &= (\rho, \underline{Q}, E)^t \\ \underline{F}(\underline{W}) &= (\rho \underline{u}, \rho \underline{u} \otimes \underline{u} + P \underline{\mathbb{I}}, \underline{u}(E + P))^t \\ \underline{D}(\underline{W}) &= (0, \rho \underline{f}, \rho(\underline{f} \cdot \underline{u} + \Phi_v))^t \end{aligned}$$

\underline{W} est donc la variable conservative, $\underline{F}(\underline{W})$ est le flux convectif et $\underline{D}(\underline{W})$ est le terme source. On intègre l'équation (3) en espace sur un élément de contrôle fluide $\Omega_{i,k}^\phi$ et en temps sur l'intervalle $[t_1, t_2]$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_{i,k}^\phi} (\partial_t \underline{W}(\mathbf{x}, t) + \underline{\nabla} \cdot \underline{F}(\underline{W}(\mathbf{x}, t))) d\Omega dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_{i,k}^\phi} (\underline{D}(\underline{W}(\mathbf{x}, t))) d\Omega dt \quad (4)$$

On utilise la formule de Green pour changer l'intégrale de volume en intégrale de surface. On obtient alors la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{i,k}^\phi} (\underline{W}(\mathbf{x}, t_2) - \underline{W}(\mathbf{x}, t_1)) d\Omega &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_{i,k}} (\underline{F}(\underline{W}(\mathbf{x}, t)) \cdot \underline{n}) d\Gamma dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_{i,k}^\phi} (\underline{D}(\underline{W}(\mathbf{x}, t))) d\Omega dt \end{aligned} \quad (5)$$

Ici, on désigne par $\Gamma_{i,k}$ l'ensemble du bord de la sous-cellule $\Omega_{i,k}^\phi$. On distingue la partie fluide de la partie solide du bord de $\Omega_{i,k}^\phi$ respectivement par $\Gamma_{i,k}^\phi$ et $\Gamma_{i,k}^w$ tels que :

$$\begin{aligned}\Gamma_{i,k} &= \Gamma_{i,k}^\phi \cup \Gamma_{i,k}^w \\ \emptyset &= \Gamma_{i,k}^\phi \cap \Gamma_{i,k}^w\end{aligned}$$

On a de plus :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{W}) \cdot \underline{n} = (\rho \underline{u} \cdot \underline{n}, (\rho \underline{u} \cdot \underline{n}) \underline{u} + P \underline{n}, (E + P) \underline{u} \cdot \underline{n})$$

Finalement, pour tout volume de contrôle Ω_i , en sommant sur les $N(i)$ sous-éléments de Ω_i , on obtient la formulation intégrale suivante :

$$\begin{aligned}\text{vol}(\Omega_i^\phi) (\underline{W}_i(t_2) - \underline{W}_i(t_1)) &+ \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_{i,k}} (\underline{\underline{F}}(\underline{W}(\mathbf{x}, t)) \cdot \underline{n}) d\Gamma dt \right) \\ &= \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_{i,k}^\phi} (\underline{\underline{D}}(\underline{W}(\mathbf{x}, t))) d\Omega dt \right)\end{aligned}$$

3 Schéma temporel

L'algorithme détaillé ci-après est basé sur une méthode à pas fractionnaires [20]. Chaque pas de temps est scindé en trois étapes : une étape de bilan de masse permettant de mettre à jour la densité et de prédire une approximation de la pression, une étape de bilan de quantité de mouvement permettant de mettre à jour la vitesse et une étape de bilan d'énergie permettant de mettre à jour l'énergie totale et d'actualiser la pression. Le schéma en temps est un schéma de type Euler implicite classique du premier ordre.

On définit $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ le pas de temps. Par abus de notation, on pose pour toute variable Ψ , $\Psi^n = \Psi(t^n)$. De plus, à chacune des trois étapes d'un pas de temps, toute variable Ψ assortie de l'exposant $\Psi^{n+1,-}$ indiquera que la variable est implicitée à l'étape en cours (ou connue de l'étape précédente). Les variables implicitées ne seront mises à jour de $t^{n+1,-}$ à t^{n+1} qu'à chaque instant t^{n+1} .

Par souci de clarté, on laissera autant que faire se peut les indices de numérotation de maille.

3.1 Schéma temporel - étape de bilan de masse

Dans cette première étape, on implicite la pression et la densité, tandis que la vitesse et l'entropie sont considérées figées à l'instant t^n . On calcule également le flux de masse convectif, que l'on notera \underline{Q}^* afin de le différencier de celui calculé à l'étape suivante. On intègre en temps entre t^n et t^{n+1} et en espace sur Ω^ϕ l'équation de conservation de la masse :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega^\phi} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{Q} \right) d\Omega dt = 0$$

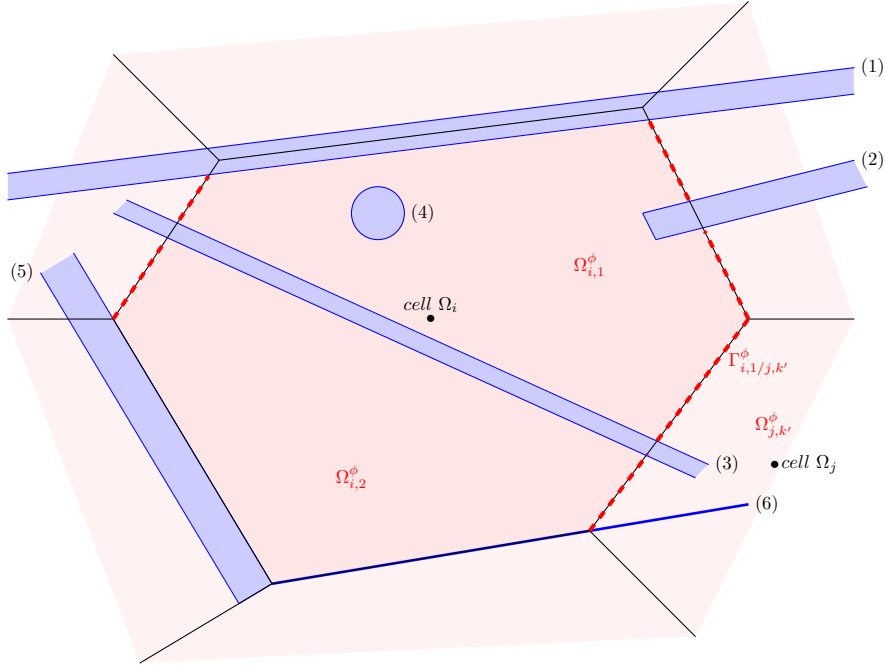


Figure 1: Un volume de contrôle (en rose) contient des obstacles (en bleu) numérotés de 1 à 6. Les obstacles peuvent être alignés avec le bord de la cellule Ω_i (éléments 5 et 6), occuper partiellement une zone fluide de la cellule (élément 2), traverser de part en part la cellule Ω_i et la diviser en deux sous-cellules $\Omega_{i,1}^\phi$ et $\Omega_{i,2}^\phi$ (élément 3), être totalement inclu dans la cellule (élément 4), chevaucher une partie du bord de la cellule (élément 1). Les surfaces pointillées rouges correspondent aux interfaces de passage fluide $\Gamma_{i,k}^\phi$ entre la sous-cellule $\Omega_{i,k}$ et les sous-cellules fluides voisines.

On décompose l'équation précédente, on applique la formule de Green pour transformer les intégrales volumiques en intégrales surfaciques et on obtient l'équation suivante :

$$\int_{\Omega^\phi} \rho(\mathbf{x}, t^{n+1}) - \rho(\mathbf{x}, t^n) d\Omega + \Delta t^n \int_{\Gamma} \underline{Q}^{n+1} \cdot \underline{n} d\Gamma = 0$$

On considère alors le schéma temporel suivant :

$$\text{vol}(\Omega^\phi) (\rho^{n+1,-} - \rho^n) + \Delta t^n \int_{\Gamma} \underline{Q}^* \cdot \underline{n} d\Gamma = 0$$

On pose pour toute variable Ψ , $\delta\Psi = \Psi^{n+1,-} - \Psi^n$. On introduit alors $\delta P = (c^2)^n \delta\rho$ avec $(c^2)^n = c^2(P^n, \rho^n)$ (voir remarque 3.1). On peut alors réécrire le schéma sous la forme suivante :

$$\text{vol}(\Omega^\phi) \frac{1}{(c^2)^n} (P^{n+1,-} - P^n) + \Delta t^n \int_{\Gamma} \underline{Q}^* \cdot \underline{n} d\Gamma = 0 \quad (6)$$

Cette étape permet d'obtenir la variable $P^{n+1,-}$, dont on peut déduire $\rho^{n+1,-}$. Il faut pour cela proposer une approximation de \underline{Q} à l'instant t^{n+1} , notée \underline{Q}^* . Ceci est réalisé en considérant l'équation de quantité de mouvement simplifiée suivante :

$$\partial_t \underline{Q} + \nabla P(\rho, s) = 0 \quad (7)$$

et $\partial_t s = 0$. Dans cette étape, l'équation de conservation de masse discrète en temps est obtenue en faisant l'approximation suivante sur la quantité de mouvement à l'instant $n+1$:

$$\underline{Q}^* = \underline{Q}^n - \Delta t^n \nabla P^{n+1,-} \quad (8)$$

Remarque 3.1 *En fait, la vraie relation est $dP = c^2 d\rho + \beta ds$ avec s représentant l'entropie et $\beta = \frac{\partial P(\rho, s)}{\partial s}$.*

Remarque 3.2 *L'approximation : $\delta P = c^2 \delta\rho$ doit impérativement être considérée pour la mise à jour des densités.*

3.2 Schéma temporel - étape de bilan de quantité de mouvement

Dans cette seconde étape, on implice la vitesse (et le débit), tandis que la densité et la pression sont connues de l'étape précédente ; l'énergie totale ne varie pas ici. On intègre en temps entre t^n et t^{n+1} et en espace sur Ω^ϕ l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega^\phi} \left(\frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u} \otimes \underline{Q}) + \nabla P - \rho \underline{f} \right) d\Omega dt = 0$$

On décompose l'intégrale précédente et on applique la formule de Green pour transformer les intégrales volumiques en intégrales surfaciques. On peut alors en déduire le schéma temporel suivant :

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega^\phi) (\underline{Q}^{n+1,-} - \underline{Q}^n) &+ \Delta t^n \int_{\Gamma} (\underline{u} (\underline{Q} \cdot \underline{n}))^{n+1,-} d\Gamma \\ &+ \Delta t^n \int_{\Gamma} P^{n+1,-} \underline{n} d\Gamma \\ &- \Delta t^n \text{vol}(\Omega^\phi) \rho^{n+1,-} \underline{f}^{n+1,-} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Cette étape permet d'obtenir la variable $\underline{u}^{n+1,-}$, et ainsi la variable $\underline{Q}^{n+1,-} = \rho^{n+1,-} \underline{u}^{n+1,-}$.

Remarque 3.3 *On peut réécrire :*

$$\underline{Q}^{n+1,-} - \underline{Q}^n = \rho^n (\underline{u}^{n+1,-} - \underline{u}^n) + \underline{u}^{n+1,-} (\rho^{n+1,-} - \rho^n)$$

en sachant que l'incrément $(\rho^{n+1,-} - \rho^n)$ est connu de l'étape précédente.

A ce stade, on connaît déjà la pression $P^{n+1,-}$ et la densité $\rho^{n+1,-}$, obtenues à l'issue de l'étape précédente (cf. équation (6)).

3.3 Schéma temporel - étape de bilan d'énergie

Dans cette dernière étape, on implémente l'énergie totale, tandis que la vitesse, la pression et la densité sont connues de l'étape précédente et ne varient pas. On intègre en temps entre t^n et t^{n+1} et en espace sur Ω^ϕ l'équation de bilan de l'énergie :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega^\phi} \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u}(E + P)) - \rho \underline{f} \cdot \underline{u} - \rho \Phi_v \right) d\Omega dt = 0$$

Une nouvelle fois, on décompose l'intégrale précédente et on applique la formule de Green pour transformer les intégrales volumiques en intégrales surfaciques. On peut alors en déduire le schéma temporel suivant :

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega^\phi) (E^{n+1,-} - E^n) &+ \Delta t^n \int_{\Gamma} \left((\underline{Q}^* \cdot \underline{n}) \frac{E + P}{\rho} \right)^{n+1,-} d\Gamma \\ &- \Delta t^n \text{vol}(\Omega^\phi) (\rho \underline{f} \cdot \underline{u} + \rho \Phi_v)^{n+1,-} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Cette étape permet d'obtenir la variable $E^{n+1,-}$.

3.4 Mise à jour des variables à $t = t^{n+1}$

A la fin de chaque pas de temps, les variables sont mises à jour de $t^{n+1,-}$ à t^{n+1} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} &= \rho^{n+1,-} \\ \underline{u}^{n+1} &= \underline{u}^{n+1,-} \\ E^{n+1} &= E^{n+1,-} \\ P^{n+1} &= P(\rho^{n+1}, \epsilon^{n+1}) \\ \text{où : } \epsilon^{n+1} &= \frac{E^{n+1}}{\rho^{n+1}} - \frac{1}{2}(\underline{u}^2)^{n+1} \end{aligned}$$

La conservativité de l'algorithme permet de retrouver les bonnes solutions choc dans le cas fluide. On renvoie le lecteur à l'article [1] pour la vérification du schéma dans le cas fluide en présence de discontinuités.

4 Schémas en espace

Les tests ont tous été réalisés sur des maillages structurés et orthogonaux, ce qui apporte certaines simplifications dans l'écriture du schéma en espace, particulièrement dans l'étape de bilan de masse pour l'évaluation de l'intégrale du gradient de pression. Pour le cadre totalement non-structuré, on renvoie à [9] et à [16].

On ne se focalise que sur les faces internes (fluides ou solides) du maillage, les conditions aux limites du domaine étant traitées dans la section 5.1. On rappelle que $S_{\Gamma_{i,k/j,k'}^\phi} = S_{i,k/j,k'}^\phi = \text{mes}(\Gamma_{i,k/j,k'}^\phi)$ et $S_{\Gamma_i^w} = S_i^w = \text{mes}(\Gamma_i^w)$, avec $\Gamma_{i,k/j,k'}^\phi$ qui représente une interface fluide entre la cellule Ω_i^ϕ et la sous-cellule $\Omega_{j,k'}^\phi$.

On applique une méthode Volumes Finis colocalisés pour la discrétisation en espace des termes des équations. La majorité des définitions utiles a été donnée dans la section 2.2 dédiée à l'écriture de la formulation intégrale.

A chaque étape, on écrit un flux numérique convectif pour évaluer chacune des différentes intégrales.

4.1 Schémas en espace - étape de bilan de masse

On part de l'équation schéma (6) issue du schéma temporel associé au bilan de masse :

$$\text{vol}(\Omega^\phi) \frac{1}{(c^2)^n} (P^{n+1,-} - P^n) + \Delta t^n \int_{\Gamma} \underline{Q}^* \cdot \underline{n} d\Gamma = 0 \quad (11)$$

On rappelle que Γ désigne l'ensemble des faces fluides et solides de la cellule, tel que :

$$\Gamma = \Gamma^\phi \cup \Gamma^w$$

On doit définir un flux numérique pour évaluer l'intégrale suivante :

$$\int_{\Gamma} \underline{Q}^* \cdot \underline{n} d\Gamma = \int_{\Gamma^\phi} \underline{Q}^* \cdot \underline{n} d\Gamma + \int_{\Gamma^w} \underline{Q}^* \cdot \underline{n} d\Gamma \quad (12)$$

On sait que la vitesse normale est nulle sur le bord solide d'une cellule, on a donc $(\underline{Q} \cdot \underline{n})_{\Gamma^w} = (\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{\Gamma^w} = 0$. L'intégrale à la paroi solide est donc nulle :

$$\int_{\Gamma^w} \underline{Q}^* \cdot \underline{n} d\Gamma = 0$$

La réécriture de l'équation de conservation de quantité de mouvement simplifiée (8) permet la décomposition de l'intégrale de surface fluide de l'équation (12), en deux intégrales telles que :

$$\int_{\Gamma^\phi} \underline{Q}^* \cdot \underline{n} d\Gamma = \int_{\Gamma^\phi} \underline{Q}^n \cdot \underline{n} d\Gamma - \int_{\Gamma^\phi} \Delta t^n \nabla P^{n+1,-} \cdot \underline{n} d\Gamma \quad (13)$$

Il reste maintenant à évaluer séparément les deux intégrales.

4.1.1 Evaluation de l'intégrale 1

On traite la première intégrale de l'équation (13) pour toute cellule Ω_i :

$$\int_{\Gamma_i^\phi} \underline{Q}^n \cdot \underline{n} d\Gamma$$

Avec l'aide des définitions évoquées dans la section 2.2, on décompose l'intégrale en une somme sur toutes les sous-interfaces fluides composant Γ_i^ϕ . On note $V(i)$ l'ensemble des voisins de Ω_i^ϕ , et pour toute variable Ψ on allège les notations en posant $\Psi_{i,k/j,k'} = \Psi_{\Gamma_{i,k/j,k'}^\phi}$. On définit alors un flux numérique convectif tel que :

$$\int_{\Gamma_i^\phi} \underline{Q}^n \cdot \underline{n} d\Gamma = \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j,k') \in V(i)} \rho_{i,k/j,k'}^{n^{upw}} (\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} S_{i,k/j,k'}^\phi \quad (14)$$

avec $\underline{n}_{i,k/j,k'}$, la normale unitaire à l'interface fluide $\Gamma_{i,k/j,k'}^\phi$ orientée de $\Omega_{i,k}^\phi$ vers $\Omega_{j,k'}^\phi$.

La valeur de $\rho_{i,k/j,k'}^{n^{upw}}$ à l'interface est calculée à partir d'un schéma upwind telle que :

$$(\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} \rho_{i,k/j,k'}^{n^{upw}} = (\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} (\beta_{i,k/j,k'} \rho_i^n + (1 - \beta_{i,k/j,k'}) \rho_j^n) \quad (15)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \beta_{i,k/j,k'} = 1, & \text{si } (\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} \geq 0 \\ \beta_{i,k/j,k'} = 0, & \text{si } (\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} < 0 \end{cases}$$

On calcule la valeur du flux $(\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'}$ à l'interface à partir de la moyenne entre les deux cellules voisines telle que :

$$(\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} = (\alpha_{i/j} \underline{u}_i + (1 - \alpha_{i/j}) \underline{u}_j) \cdot \underline{n}_{i,k/j,k'} \quad (16)$$

avec

$$\alpha_{i/j} = \frac{h_j}{h_i + h_j}$$

et h_i la distance du centre de la cellule fluide Ω_i^ϕ à l'interface $\Gamma_{i/j}$. Si la cellule i est encombrée (cf. Figure 2), la distance h_i est redéfinie comme la distance h'_i à l'interface $\Gamma_{i/j}$ du point I' centre de la partie fluide de la cellule i encombrée.

4.1.2 Evaluation de l'intégrale 2

On traite la seconde intégrale de l'équation (13) pour toute cellule Ω_i :

$$\int_{\Gamma_i^\phi} \Delta t^n \nabla P^{n+1,-} \cdot \underline{n} d\Gamma$$

Rappelons que les cas tests ont tous été réalisés sur des maillages structurés orthogonaux, ce qui permet une écriture simple du schéma. On décompose l'intégrale de surface en une somme sur toutes les faces fluides. Une nouvelle fois, $V(i)$ représente l'ensemble des voisins de Ω_i^ϕ . De plus, numériquement et malgré la présence potentielle de sous-éléments, la valeur de la pression dans la

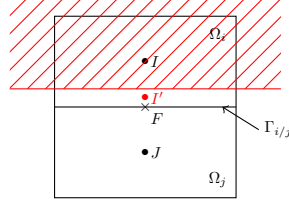


Figure 2: La cellule Ω_i est partiellement encombrée par un interne. On doit alors recalculer la distance à l'interface $\overline{I'F}$ et la pondération $\alpha_{i/j}$ de l'interface $\Gamma_{i/j}$ en fonction des centres I' et J des cellules fluides Ω_i^ϕ et Ω_j^ϕ .

cellule Ω_i est uniforme.

Le gradient de pression à l'interface est approché par une moyenne simple des pressions aux cellules voisines. Le schéma s'écrit donc simplement :

$$\int_{\Gamma_i^\phi} \nabla P^{n+1,-} \cdot \underline{n} d\Gamma = \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j,k') \in V(i)} \frac{1}{h_i + h_j} (P_j - P_i)^{n+1,-} S_{i,k/j,k'}^\phi \quad (17)$$

avec h_i la distance du centre de la cellule fluide Ω_i^ϕ à l'interface $\Gamma_{i/j}$. Comme cela à été mentionné au paragraphe précédent, la distance h_i est redéfinie comme la distance h'_i à l'interface $\Gamma_{i/j}$ du point I' centre de la partie fluide de la cellule i encombrée.

4.2 Schémas en espace - étape de bilan de quantité de mouvement

On part de l'équation schéma (9) issue du schéma temporel associé au bilan de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega^\phi) (\underline{Q}^{n+1,-} - \underline{Q}^n) &+ \Delta t^n \int_{\Gamma} (\underline{u}(\underline{Q} \cdot \underline{n}))^{n+1,-} d\Gamma \\ &+ \Delta t^n \int_{\Gamma} P^{n+1,-} \underline{n} d\Gamma \\ &- \Delta t^n \text{vol}(\Omega^\phi) \rho^{n+1,-} \underline{f}^{n+1,-} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

A ce stade, les forces volumiques externes $\underline{f}^{n+1,-}$ et la densité $\rho^{n+1,-}$ sont connues, le dernier terme de l'équation (18) est donc "explicite". Il reste à définir les flux numériques pour évaluer chacune des deux intégrales de (18) :

$$\text{a.} \quad \int_{\Gamma} (\underline{u}(\underline{Q} \cdot \underline{n}))^{n+1,-} d\Gamma \quad (19)$$

$$\text{b.} \quad \int_{\Gamma} P^{n+1,-} \underline{n} d\Gamma \quad (20)$$

4.2.1 Evaluation de l'intégrale a.

On traite la première intégrale de (18). Pour débiter, on la décompose sur Γ^w et Γ^ϕ telle que :

$$\int_{\Gamma} (\underline{u}(\underline{Q} \cdot \underline{n}))^{n+1,-} d\Gamma = \int_{\Gamma^w} (\underline{u}(\underline{Q} \cdot \underline{n}))^{n+1,-} d\Gamma + \int_{\Gamma^\phi} (\underline{u}(\underline{Q} \cdot \underline{n}))^{n+1,-} d\Gamma \quad (21)$$

Comme évoqué précédemment, la vitesse normale au bord solide est nulle, on peut donc déduire que l'intégrale sur Γ^w est nulle :

$$\int_{\Gamma^w} (\underline{u}(\underline{Q} \cdot \underline{n}))^{n+1,-} d\Gamma = 0$$

Il reste à évaluer la partie fluide de l'intégrale (21), pour toute cellule Ω_i . On la décompose en une somme sur tout les sous-éléments fluides de Γ_i^ϕ , en utilisant les définitions de la section 2.2. On définit un flux numérique comme suit :

$$\int_{\Gamma_i^\phi} (\underline{u}(\underline{Q} \cdot \underline{n}))^{n+1,-} d\Gamma = \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j,k') \in V(i)} (\underline{Q}^* \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} (\underline{u}^{n+1,-})_{i,k/j,k'}^{upw} S_{i,k/j,k'}^\phi \quad (22)$$

La valeur de $(\underline{Q}^* \cdot \underline{n}) S^\phi$ a déjà été calculée dans l'étape précédente. En effet, l'équation (13) nous donne directement la valeur suivante :

$$(\underline{Q}^* \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} S_{i,k/j,k'}^\phi = \int_{\Gamma_{i,k/j,k'}^\phi} \underline{Q}^* \cdot \underline{n} d\Gamma$$

La valeur de $(\underline{u}^{n+1,-})_{i,k/j,k'}^{upw} = \left(\frac{Q^{n+1,-}}{\rho^{n+1,-}} \right)_{i,k/j,k'}^{upw}$ à l'interface est calculée à partir d'un schéma upwind telle que :

$$(\underline{u}^{n+1,-})_{i,k/j,k'}^{upw} = \beta_{i,k/j,k'} (\underline{u}_i)^{n+1,-} + (1 - \beta_{i,k/j,k'}) (\underline{u}_j)^{n+1,-} \quad (23)$$

avec $\rho_{i,k/j,k'}^{n+1,-}$ connu de l'étape précédente et

$$\begin{cases} \beta_{i,k/j,k'} = 1, & \text{si } (\underline{Q}^* \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} \geq 0 \\ \beta_{i,k/j,k'} = 0, & \text{si } (\underline{Q}^* \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} < 0 \end{cases} \quad (24)$$

4.2.2 Evaluation de l'intégrale b.

La valeur de la pression dans l'intégrale (20) à évaluer est déjà connue depuis l'étape de bilan de masse pour tout élément Ω_i . La décomposition de l'intégrale sur Γ^w et Γ^ϕ devient donc explicite et s'écrit :

$$\int_{\Gamma} P^{n+1,-} \underline{n} d\Gamma = \int_{\Gamma^w} P^{n+1,-} \underline{n} d\Gamma + \int_{\Gamma^\phi} P^{n+1,-} \underline{n} d\Gamma$$

Au niveau des zones de passage fluide Γ^ϕ , la contribution est une moyenne interpolée linéairement, c'est à dire :

$$P_{i/j} = \frac{h_j P_i + h_i P_j}{h_i + h_j}$$

avec h_i la distance du centre de la cellule Ω_i à l'interface $\Gamma_{i/j}$. Ici encore, la distance h_i est redéfinie comme la distance h'_i à l'interface $\Gamma_{i/j}$ du point I' centre de la partie fluide de la cellule i encombrée.

En ce qui concerne les zones de paroi solide Γ^w , la contribution est décentrée en prenant directement la valeur dans la cellule :

$$P_i^w = P_i$$

Remarque 4.1 *En sommant sur toute les faces d'une cellule, on réécrit le gradient de pression de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega_i^\phi) \nabla_i P &= \sum_{j \in V(i)} P_{i/j} \underline{S}_{i/j}^\phi + \sum_{w_i} P_i^w \underline{S}_i^w \\ &= \sum_{j \in V(i)} P_{i/j} \underline{S}_{i/j}^\phi + P_i \left(- \sum_{j \in V(i)} \underline{S}_{i/j}^\phi \right) \\ &= \sum_{j \in V(i)} (P_{i/j} - P_i) \underline{S}_{i/j}^\phi \end{aligned}$$

car :

$$\int_{\Gamma_i} \underline{n} dS = \underline{0} = \sum_{j \in V(i)} \underline{S}_{i/j}^\phi + \sum_{w_i} \underline{S}_i^w$$

4.3 Schémas en espace - étape de bilan d'énergie

On part de l'équation schéma (10) issue du schéma temporel associé au bilan d'énergie :

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega^\phi) (E^{n+1,-} - E^n) &+ \Delta t^n \int_{\Gamma} ((\underline{u} \cdot \underline{n})(E + P))^{n+1,-} d\Gamma \\ &- \Delta t^n \text{vol}(\Omega^\phi) (\rho \underline{f} \cdot \underline{u} + \rho \Phi_v)^{n+1,-} = 0 \end{aligned}$$

Ici, la densité $\rho^{n+1,-}$, la vitesse $\underline{u}^{n+1,-}$, les forces volumiques externes $\underline{f}^{n+1,-}$ et le terme source $\Phi_v^{n+1,-}$ sont déjà connus. La dernière partie de l'équation (25) est donc explicitement écrite. Il ne reste qu'à définir les flux numériques pour évaluer l'intégrale de surface décomposée sur les zones fluides et solides :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} ((\underline{u} \cdot \underline{n})(E + P))^{n+1,-} d\Gamma &= \int_{\Gamma^w} ((\underline{u} \cdot \underline{n})(E + P))^{n+1,-} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma^\phi} ((\underline{u} \cdot \underline{n})(E + P))^{n+1,-} d\Gamma \end{aligned} \quad (25)$$

Une nouvelle fois, la vitesse normale au bord solide Γ^w est nulle, on peut en déduire que l'intégrale de surface est nulle aux faces solides :

$$\int_{\Gamma^w} ((\underline{u} \cdot \underline{n})(E + P))^{n+1,-} d\Gamma = 0$$

Il reste à évaluer la partie fluide de l'intégrale (25), pour toute cellule Ω_i . Avant de définir un flux numérique pour approcher cette intégrale, on dissocie

l'énergie totale et la pression, de sorte à obtenir deux sous-intégrales, l'une en fonction de l'énergie et l'autre en fonction de la pression.

Sachant que $(\underline{u} \cdot \underline{n}) = \frac{1}{\rho} (\underline{Q} \cdot \underline{n})$ on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i^\phi} \left((\underline{Q} \cdot \underline{n}) \left(\frac{E+P}{\rho} \right) \right)^{n+1,-} d\Gamma &= \int_{\Gamma_i^\phi} \left((\underline{Q} \cdot \underline{n}) \left(\frac{E}{\rho} \right) \right)^{n+1,-} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_i^\phi} \left((\underline{Q} \cdot \underline{n}) \left(\frac{P}{\rho} \right) \right)^{n+1,-} d\Gamma \end{aligned} \quad (26)$$

A l'aide des définitions de la section 2.2, on décompose chacune des deux intégrales en une somme sur toutes les interfaces fluides de Γ_i^ϕ . On définit un flux numérique pour chaque intégrale tel que l'ensemble s'écrive :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i^\phi} ((\underline{u} \cdot \underline{n}) (E+P))^{n+1,-} d\Gamma &= \\ &\sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j, k') \in V(i)} (\underline{Q}^* \cdot \underline{n})_{i, k/j, k'} \left(\frac{E^{n+1,-}}{\rho^{n+1,-}} \right)_{i, k/j, k'}^{upw} S_{i, k/j, k'}^\phi \\ &+ \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j, k') \in V(i)} (\underline{Q}^* \cdot \underline{n})_{i, k/j, k'} \left(\frac{P^{n+1,-}}{\rho^{n+1,-}} \right)_{i, k/j, k'}^{upw} S_{i, k/j, k'}^\phi \end{aligned}$$

Les valeurs de $\left(\frac{E^{n+1,-}}{\rho^{n+1,-}} \right)_{i, k/j, k'}^{upw}$ et $\left(\frac{P^{n+1,-}}{\rho^{n+1,-}} \right)_{i, k/j, k'}^{upw}$ à l'interface fluide sont calculées à partir d'un schéma upwind telles que :

$$(\Phi)_{i, k/j, k'}^{upw} = \beta_{i, k/j, k'} (\Phi)_i^{n+1,-} + (1 - \beta_{i, k/j, k'}) (\Phi)_j^{n+1,-}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \beta_{i, k/j, k'} = 1, & \text{si } (\underline{Q}^* \cdot \underline{n})_{i, k/j, k'} \geq 0 \\ \beta_{i, k/j, k'} = 0, & \text{si } (\underline{Q}^* \cdot \underline{n})_{i, k/j, k'} < 0 \end{cases}$$

5 Remarques globales

5.1 Prise en compte des conditions aux limites

La prise en compte des conditions aux limites sur le bord du domaine de calcul est assez classique. On distingue les conditions de paroi des conditions d'entrée sortie.

5.1.1 Conditions de paroi

Il s'agit donc ici des parties de la frontière du volume de contrôle Ω_i qui se superposent exactement à une paroi solide. Dans ce cas on utilise soit une condition classique :

$$P_i^w = P(W_i^n) = P_i^n \quad (27)$$

soit une condition issue de l'utilisation d'un demi-problème de Riemann avec condition d'état miroir dans la cellule fictive associée:

$$P_i^w = P^{Riemann}(W_i^n, \hat{W}_i^n) \quad (28)$$

où \hat{W}_i^n désigne l'état miroir associé à W_i^n .

Il faut en particulier noter que c'est la première condition qui est utilisée pour évaluer les intégrales de bord en pression **au sein** des volumes de contrôle lorsque ceux-ci contiennent des obstacles (cf section 4.2). La seconde condition est *a priori* plus physique, et est fortement recommandée lorsque les vitesses locales normales à la paroi sont non négligeables. On rappelle que, pour les équations d'Euler, et pour une loi thermodynamique quelconque, la forme générale de cette valeur est du type:

$$P^{Riemann}(W_i^n, \hat{W}_i^n) = P(W_i^n) (1 + f(M_i^n))$$

où M_i^n désigne le nombre de Mach local basé sur la vitesse normale à la paroi : $M_i^n = (\underline{u} \cdot \underline{n} / c)_i^n$ (\underline{n} représentant la normale sortante), sachant que:

$$f(0) = 0.$$

avec $f(x < 0) < 0$ et : $f(x > 0) > 0$. On note donc que lorsque l'écoulement est localement tangent à la paroi (et donc $M_i^n = 0$), cette formule redonne la condition de type 27.

Le détail de $f(x)$ nécessite de se donner la forme exacte de la loi thermodynamique du fluide. L'évaluation de la fonction $f(x)$ se fait simplement en considérant les solutions de type "détente" lorsque $x < 0$ et de type "choc" lorsque $x > 0$. C'est d'ailleurs la configuration "détente" qui permet de gérer au mieux les configurations de dépressurisation brutale, avec potentiellement une apparition de vide. Par exemple, pour un gaz parfait, la forme explicite de la fonction $f(x)$ est donnée dans [5].

5.1.2 Conditions de type entrée - sortie

Le cas des frontières de type "entrée - sortie" est lui aussi géré classiquement, en utilisant les formulations en demi-problème de Riemann, comme suggéré initialement dans [8]. On ne reprend pas ici cette formulation, et on renvoie au rapport ci-dessus mentionné, et également à l'article [4], qui explicite les différentes configurations, ainsi que différents cas correspondant à un choix de variables prescrites (voir aussi [16] pour ces aspects).

5.1.3 Remarques concernant l'adaptation au cadre avec obstacles

La prise en compte des conditions aux limites fluides sur les interfaces partiellement obstruées par la présence d'internes se fait de manière classique, en veillant cependant à considérer la surface de passage fluide efficace (c.f. Figure 3).

5.2 Positivité de la pression $P^{n+1,-}$ et de la densité $\rho^{n+1,-}$

On rappelle que les cas tests ont été réalisés sur des maillages structurés et orthogonaux, c'est pourquoi les schémas en espace ont été décrits en suivant cette caractéristique. Cette section a pour vocation de démontrer la positivité de la pression et de la densité. Pour cela, on écrit l'équation schéma issue du

schéma temporel puis en espace, comme suit :

$$\begin{aligned}
& \text{vol}(\Omega_i^\phi) \frac{P_i^{n+1,-} - P_i^n}{(c_i^2)^n} \\
& + \Delta t^n \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j, k') \in V(i)} (\beta_{i, k/j, k'} \rho_i^n + (1 - \beta_{i, k/j, k'}) \rho_j^n) (\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i, k/j, k'} S_{i, k/j, k'}^\phi \\
& - (\Delta t^n)^2 \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j, k') \in V(i)} \frac{1}{h_i + h_j} (P_j - P_i)^{n+1,-} S_{i, k/j, k'}^\phi \\
& = 0
\end{aligned} \tag{29}$$

avec les définitions données tout au long de la section 4.1.

On peut réécrire l'équation (29) sous sa forme matricielle $\underline{\underline{A}} \underline{X} = \underline{B}$ avec $\underline{X} = (P_i^{n+1,-})_{i \in \{1, N_{cell}\}}$ et N_{cell} le nombre de cellules. On a alors $\forall i \in \{1, N_{cell}\}$ et $\forall j \in V(i)$ avec $j \neq i$:

$$\begin{aligned}
A_{ii} &= \begin{cases} \frac{\text{vol}(\Omega_i^\phi)}{(c_i^2)^n} + (\Delta t^n)^2 \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j, k') \in V(i)} \frac{S_{i, k/j, k'}^\phi}{h_i + h_j} & , \text{ si } \text{vol}(\Omega_i^\phi) > 0 \\ 1 & , \text{ sinon.} \end{cases} \\
A_{ij} &= \begin{cases} -\frac{(\Delta t^n)^2}{h_i + h_j} \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j, k') \in V(i)} S_{i, k/j, k'}^\phi & , \text{ si } j \in V(i) \text{ et } \text{vol}(\Omega_i^\phi) > 0 \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases} \\
B_i &= \begin{cases} \frac{\text{vol}(\Omega_i^\phi)}{(c_i^2)^n} P_i^n \\ -\Delta t^n \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j, k') \in V(i)} (\beta_{i, k/j, k'} \rho_i^n + (1 - \beta_{i, k/j, k'}) \rho_j^n) (\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i, k/j, k'} S_{i, k/j, k'}^\phi & , \text{ si } \text{vol}(\Omega_i^\phi) > 0 \\ P_i^n & , \text{ sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Remarque 5.1 Dans le cas où le volume d'une cellule Ω_i est nul, on considère alors toutes ses faces comme solides, c'est à dire si $\text{vol}(\Omega_i^\phi) = 0$, alors $\forall (j, k') \in V(i)$, $S_{i, k/j, k'}^\phi = 0$. On a alors directement $B_i = P_i^n$.

On rappelle que le pas de temps Δt^n est strictement positif, et pour tout $i \in 1 \dots N_{cell}$, $(c_i^2)^n \geq 0$ et $\text{vol}(\Omega_i^\phi) \geq 0$. De plus, $\forall (j, k') \in V(i)$, $S_{i, k/j, k'}^\phi \geq 0$ et $h_i + h_j > 0$. Donc, tous les termes diagonaux de la matrice $\underline{\underline{A}}$ sont strictement positifs $A_{ii} > 0$, et tous les termes extra-diagonaux sont négatifs ou nuls $A_{ij} \leq 0$. Ainsi, $\underline{\underline{A}}$ est une M-matrice.

De plus, $\forall i \in \{1, N_{cell}\}$:

$$\begin{aligned}
|A_{ii}| - \sum_{j \neq i} |A_{ij}| &= |A_{ii}| - \sum_{j \in V(i)} |A_{ij}| \\
&= A_{ii} + \sum_{j \in V(i)} A_{ij} \\
&= \begin{cases} \frac{vol(\Omega_i^\phi)}{(c_i^2)^n} & , \text{ si } vol(\Omega_i^\phi) > 0 \\ 1 & , \text{ sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

La matrice \underline{A} est donc inversible, et telle que $(\underline{A})^{-1} \geq 0$, c'est à dire $\left((\underline{A})^{-1}\right)_{i,j} \geq 0 \forall (i,j) \in \{1, N_{cell}^\phi\}^2$.

Si $vol(\Omega_i^\phi) > 0$, on réécrit B_i sous la forme :

$$\begin{aligned}
B_i &= \left\{ \frac{vol(\Omega_i^\phi)}{(c_i^2)^n} - \Delta t^n \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j,k') \in V(i)} \beta_{i,k/j,k'} \frac{\rho_i^n}{P_i^n} (\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} S_{i,k/j,k'}^\phi \right\} P_i^n \\
&\quad - \Delta t^n \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j,k') \in V(i)} (1 - \beta_{i,k/j,k'}) \rho_j^n (\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} S_{i,k/j,k'}^\phi \quad (30)
\end{aligned}$$

Propriété 5.2.1 On considère des données initiales $\rho_i^n > 0$ et $P_i^n > 0$, $\forall k$. Alors si la condition CFL suivante :

$$vol(\Omega_i^\phi) \geq \Delta t^n \sum_{k \in \{1, N(i)\}} \sum_{(j,k') \in V(i)} \beta_{i,k/j,k'} \left(\frac{\rho_i c_i^2}{P_i} \right)^n (\underline{u}^n \cdot \underline{n})_{i,k/j,k'} S_{i,k/j,k'}^\phi \quad (31)$$

est vérifiée, la positivité de la pression $P_i^{n+1,-}$ est assurée pour tout i .

Preuve :

Il suffit de voir, en considérant (30), que B_i est positif, car c'est une combinaison convexe de P_i^n et des ρ_j^n , si (31) est vérifiée. Sachant que :

$$\underline{X} = (\underline{A})^{-1} \underline{B}$$

on en déduit que $X_i \geq 0$.

On montre également que la densité $\rho^{n+1,-}$ est positive. Considérons dans un premier temps une EOS de type gaz parfait. On a :

$$\rho^{n+1,-} - \rho^n = \frac{P^{n+1,-} - P^n}{(c^2)^n}$$

Donc, si $P^{n+1,-} \geq P^n$ alors $\rho^{n+1,-} \geq \rho^n > 0$, la densité reste bien positive.

Sinon, si $P^{n+1,-} \leq P^n$ alors $\rho^{n+1,-} \leq 0 \Leftrightarrow \rho^n (c^2)^n + (P^{n+1,-} - P^n) \leq 0$.

Cette dernière inégalité ne peut avoir lieu pour une thermodynamique de gaz parfait, car il impossible d'avoir $\gamma + \left(\frac{P^{n+1,-}}{P^n} - 1 \right) \leq 0$, puisque $\gamma - 1 \geq 0$ et

$\frac{P^{n+1,-}}{P^n} > 0$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Propriété 5.2.2 *Soit une équation d'état thermodynamique telle que $\rho c^2/P = \hat{\gamma} > 1$. Alors la densité $\rho^{n+1,-}$ reste positive sous la condition (31).*

Preuve :

La preuve est identique au cadre d'une loi d'état de gaz parfait.

5.3 Conservativité en temps et en espace

L'algorithme global est donc conservatif en temps et en espace. Il faut noter que l'étape finale 3.4 de mise à jour des variables à l'instant $t = t^{n+1}$ n'affecte pas ce principe de conservation. Il faut souligner cependant que la première étape de résolution de l'équation de bilan de masse, qui est couplée à une prédiction de la quantité de mouvement, peut affecter la conservation en *temps*, si la réactualisation de la densité discrète $\rho^{n+1,-}$ n'est pas effectuée correctement, ce qui est le cas par exemple si cette actualisation est faite sous la forme:

$$\rho^{n+1,-} = \rho(P^{n+1,-}, s^n).$$

Le document [14] présente une comparaison des résultats de convergence numérique. Il montre en particulier qu'une réactualisation non conservative de la densité, à l'issue de l'étape de pression-continuité (bilan de masse), n'interdit pas la convergence de la suite d'approximations discrètes quand h et Δt tendent vers 0, à vitesse $\Delta t/h = \text{constante}$, mais que la solution limite n'est pas la bonne solution lorsque des discontinuités sont présentes dans la solution. Ce résultat est bien entendu classique.

Les vitesses de convergence observées, lorsque les cas tests sont issus de problèmes de Riemann, sont classiques également. Pour des schémas d'ordre un pour des solutions régulières, on retrouve donc un ordre 1/2 asymptotiquement lorsque l'on observe les variables variant à la traversée des discontinuités de contact (concentrations, etc) ; de même, on retrouve un ordre 1 de convergence pour les variables dont les variations sont portées uniquement par les champs vraiment non linéaires (pour Euler : pression, vitesse), qu'il s'agisse de détonations ou de chocs (voir par exemple [11, 10] à ce sujet).

Remarque 5.2 *Au voisinage du stationnaire, le schéma assure la conservation de l'enthalpie totale.*

6 Résultats numériques

6.1 Écoulement d'un fluide compressible dans une conduite encombrée d'obstacles.

On souhaite simuler le comportement d'un écoulement stationnaire d'un fluide compressible non visqueux à l'intérieur d'une conduite de taille infinie d'amont en aval, et encombrée dans sa moitié aval de barreaux immobiles non perméables alignés dans le sens du conduit et de l'écoulement supposé unidirectionnel à l'infini.

Le milieu est représenté numériquement par un domaine de calcul 2D rectangulaire de longueur L et de hauteur h . Il contient deux éléments internes tubulaires de longueur $L/2$, de largeur $h/5$, et disposés dans la moitié aval du domaine, de manière semblable à ceux de la Figure 4. L'espace entre les barreaux et leur distance aux bords les plus proches du domaine sont aussi de $h/5$. Le domaine de calcul possède donc une interface de transition discontinue entre une zone totalement fluide et une zone encombrée située au commencement des internes, à $x = L/2$.

On considère en entrée et en sortie fluides du domaine des conditions issues de la résolution de demi-problèmes de Riemann (cf. [8]).

Le pas de temps est régi par la condition de type CFL décrite dans la propriété 5.2.1.

6.2 Etude de convergence en maillage

Les calculs ont été réalisés sur plusieurs maillages dont certains adaptés au domaine, c'est à dire ces maillages ont été conçus afin d'être en présence de cellules totalement fluides ou entièrement solides. Dans le cas de présence de cellules fluides partiellement obstruées par un interne, le maillage sera considéré "poreux".

6.2.1 Etude d'un premier maillage grossier

On s'intéresse dans un premier temps aux résultats obtenus avec un maillage cartésien composé de 48×12 mailles. Le maillage contient alors des cellules totalement fluides, entièrement solides et partiellement fluides (voir Figure 5 pour le taux de porosité par maille).

On considère avoir obtenu un écoulement suffisamment stationnaire, lorsqu'on a un résidu temporel, en norme L^2 , suffisamment petit. On teste le résidu temporel sur la pression, la vitesse et l'énergie totale, dont on trace les résultats en fonction des itérations sur la Figure 10. On constate que la convergence du calcul est principalement régie par la vitesse.

On se réfère à la Figure 6 pour la densité, à la Figure 7 pour la vitesse axiale, à la Figure 8 pour la vitesse transverse, et à la Figure 9 pour la pression.

On désigne par P^w la pression à la paroi d'entrée des internes, et S_w tel que $S_w = S_{in} - S_{out}$ (cf. Figure 4). On pose $\varphi = (QS, QSH, (QU + P)S)$, et $\Delta = (0., 0., P^w S_w)$ (avec Q le débit, S la section de passage, H l'enthalpie totale, U la vitesse axiale, et P la pression).

Lorsque l'écoulement est stationnaire, on a *a priori* $\varphi_{amont} = \varphi_{aval} + \Delta$,

φ	φ_{amont}	φ_{aval}	Δ	Ecart $e(\varphi)$
QS	4.873	4.871	0.	1.197×10^{-4}
QHS	1684729.88	1680419.43	0.	1.281×10^{-3}
$(QU + P)S$	100062.33	60040.07	40021.45	4.018×10^{-6}

Table 1: Comparaison, pour chaque quantité φ , des résultats en amont et en aval de l'interface de transition milieu fluide/milieu encombré, issus du calcul sur maillage composé de 48×12 mailles. On note $\Delta_3 = P^w S_w$ le flux de la pression à la paroi d'entrée des internes.

c'est à dire :

$$\begin{aligned}
(QS)_{amont} &= (QS)_{aval} \\
(QSH)_{amont} &= (QSH)_{aval} \\
((QU + P)S)_{amont} &= ((QU + P)S)_{aval} + P^w S_w
\end{aligned} \tag{32}$$

On préleve en amont et en aval de l'interface (respectivement en S_{in} et en S_{out} sur la Figure 4) de transition de milieux fluide et encombré, sur une colonne de cellules, les valeurs de φ et Δ . On donne dans le tableau Table 1 l'écart $e(\varphi)$ entre les valeurs amont et aval pour chaque équation de (32), tel que :

$$e(\varphi) = \frac{|\varphi_{amont} - (\varphi_{aval} + \Delta)|}{|\varphi_{amont}| + |\varphi_{aval}| + |\Delta|}.$$

6.2.2 Etude de plusieurs maillages grossiers et fins

Le cas test a été testé sur plusieurs maillages grossiers et relativement fins. On part de deux premiers maillages grossiers composés de 24×5 et 24×6 cellules, respectivement adapté et non adapté au domaine. On subdivise par 2 dans les deux directions x et y afin d'obtenir des maillages de plus en plus fins, jusqu'à être composés de 384×80 et 192×48 mailles.

Les 6 maillages adaptés au domaine, dont les cellules sont totalement fluides ou bien entièrement solides, sont respectivement composés de 24×5 , 48×10 , 96×20 , 192×40 , 384×80 et 768×160 mailles. Les 4 maillages dits poreux, dont certaines cellules sont partiellement obstruées par un interne, sont respectivement composés de 24×6 , 48×12 , 96×24 et 192×48 mailles.

Pour chaque maillage, on souhaite observer l'écart entre le membre de droite et celui de gauche des équations de (32), suffisamment en amont et en aval. A chaque équation de (32) sont associés deux graphes dont les valeurs ont été prises au centre des cellules d'une colonne de maille pour l'un, et prises aux faces de bords d'entrée et sortie du domaine pour l'autre (cf. Figure 11 et Figure 12, Figure 13 et Figure 14, Figure 15 et Figure 16). Sur chaque graphe, on trace les écarts $e(\varphi)$, en distinguant en deux courbes les résultats issus des maillages adaptés au domaine de ceux issus des maillages poreux.

Sur les graphes dont les valeurs ont été récupérées au centre des cellules, on peut constater que le bilan de masse est mieux conservé dans le cas des résultats issus des calculs sur maillages poreux, tandis qu'on observe l'inverse sur les

deux autres graphes. On peut aussi voir, sur le premier graphe Figure 11 que la courbe des résultats poreux semble se stabiliser, au lieu de continuer à décroître comme attendu.

De plus, on remarque sur les trois graphes des flux récupérés aux interfaces, que l'écart sur le maillage adapté le plus fin, entre les flux amont et aval, est supérieur aux autres. Le résidu temporel du calcul sur le maillage le plus fin, en norme L^2 , devient quant à lui monotone, avec une valeur de l'ordre de 5.10^{-5} sur la vitesse. Ceci peut être du à la précision des solveurs intégré au code de calcul.

6.3 Adaptation du maillage au domaine : analyse de stabilité.

On considère ici toujours un même maillage, à savoir composé de 24×5 cellules. Ce maillage grossier appliqué à la géométrie décrite en préambule ne présente alors pas de cellules partiellement encombrées (c'est à dire le taux de porosité par maille est soit nul, soit égal à 1).

Le domaine décrit précédemment mesure concrètement $L = 5$ en longueur et $h = 1$ en hauteur, on a donc $x \in [0, 5]$ et $y \in [0, 1]$. La zone encombrée par les internes débute à $x_0 = L/2 = 2.5$, les bords horizontaux du premier interne se situent à $y_1 = 0, 2$ et $y_2 = 0, 4$, et les bords du second interne se situent à $y_3 = 0, 6$ et $y_4 = 0, 8$.

Pour tester la sensibilité du positionnement d'un même maillage sur le domaine, on va comparer les écarts de résultats lorsque l'un des barreaux est initialement décalé. On considère un premier positionnement des internes comme décrit plus haut, c'est à dire le maillage épouse parfaitement le bord des barreaux (on nomme cette configuration M_1 , cf. Figure 17). On réduit ensuite la largeur d'un des internes de sorte que sa distance à la paroi soit très légèrement plus grande (on nomme ce calcul M_2 , cf. Figure 18). On diminue une fois de plus très légèrement la largeur de ce même barreau et sa longueur (on nomme ce maillage M_3 , cf. Figure 19). Ces nouveaux positionnements ont pour conséquence de faire évoluer les cellules initialement solides du barreau en cellules très peu fluides (c'est à dire fluides avec un très faible taux de porosité).

On cherche le plus grand écart, par variable $\varphi = (\rho, u, v, P)$, en valeur absolue, entre deux calculs M_k et M_l , parmi toutes les cellules fluides ($k = 1, 2$ ou 3 , $l = 1, 2$ ou 3 et $k \neq l$). On utilise pour toute variable φ la formule suivante :

$$E_{i_0}^{M_k M_l} = \max_{i=1, \dots, N_{cells}^\phi} \left(e(\varphi)_i^{M_k M_l} \right)$$

avec

$$e(\varphi)_i^{M_k M_l} = \frac{|\varphi_i^{M_k} - \varphi_i^{M_l}|}{|\varphi_i^{M_l}|}$$

On observe, pour commencer, dans le tableau Table 2 les écarts entre le calcul M_1 sur maillage adapté au domaine (cf. Figure 17) et le calcul sur la seconde

configuration M_2 , où l'on impose un espace de 10^{-5} entre le bord inférieur de l'interne et les interfaces fluides les plus proches (cf. Figure 18).

Variable	numéro de maille	x	y	écart
Density	23	4.6875	0.1	2.3842×10^{-6}
Velocity X	36	2.3958	0.3	3.0482×10^{-4}
Velocity Y	50	0.3125	0.5	1.0000
Pressure	13	2.60417	0.1	1.6911×10^{-8}

Table 2: *Comparaison des résultats entre M_1 et M_2 . x et y représentent les coordonnées du centre de la cellule identifiée par son numéro de maille.*

On observe ensuite les écarts de résultats pour chaque variable entre le calcul M_1 avec le maillage adapté au domaine, et le calcul M_3 dans lequel chaque bord du barreau réduit est positionné à 10^{-5} des faces les plus proches (cf. Table 3).

Variable	numéro de maille	x	y	écart
Density	14	2.8125	0.1	1.5046×10^{-3}
Velocity X	36	2.3958	0.3	1.2654
Velocity Y	36	2.3958	0.3	1.1428
Pressure	14	2.8125	0.1	2.205×10^{-3}

Table 3: *Comparaison des résultats entre M_1 et M_3 . x et y représentent les coordonnées du centre de la cellule identifiée par son numéro de maille.*

On compare enfin les résultats des calculs M_2 et M_3 (cf. Table 4).

Variable	numéro de maille	x	y	écart
Density	14	2.8125	0.1	1.5046×10^{-3}
Velocity X	34	1.9792	0.3	1.9322
Velocity Y	83	2.1875	0.7	35.0707
Pressure	14	2.8125	0.1	2.2099×10^{-3}

Table 4: *Comparaison des résultats entre M_2 et M_3 . x et y représentent les coordonnées du centre de la cellule identifiée par son numéro de maille.*

On peut constater dans un premier temps que les écarts sont globalement situés dans la même zone, près de l'entrée des internes (dans notre cas, l'entrée des internes se situe en $x_0 = 2.5$). On observe également un plus net écart de résultats entre la configuration M_3 et les 2 autres.

7 Bibliographie

References

- [1] F. Archambeau, J-M. Hérard, and J. Laviéville. Comparative study of pressure-correction and godunov-type schemes on unsteady compressible cases. *Computers & Fluids*, 38:1495–1509, 2009.
- [2] F. Archambeau, N. Mechitoua, and M. Sakiz. *Code_Saturne*: a finite volume code for the computation of turbulent incompressible flows - industrial applications. *International Journal on Finite Volumes*, 1(1), 2004.
- [3] M. Belliard. Méthodes de décomposition de domaine et de frontière immergée pour la simulation des composants nucléaires. *Habilitation à Diriger des Recherches, Aix-Marseille Université*, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01085328>, 2014.
- [4] F. Blondel, B. Audebert, T. Pasutto, and M. Stanciu. Condensation models and boundary conditions for non-equilibrium wet steam flows. *International Journal on Finite Volumes*, 10, 2013.
- [5] T. Buffard, T. Gallouët, and J-M. Hérard. A sequel to a rough godunov scheme. application to real gases. *Computers & Fluids*, 29:13–847, 2000.
- [6] A.J. Chorin. Numerical solution of the naver-stokes equations. *Mathematics of computation*, 22(104):745–762, 1968.
- [7] G. Le Coq, S. Aubry, J. Cahouet, P. Lequesne, G. Nicolas, and S. Pastorini. The THYC computer code. A finite volume approach for 3 dimensional two-phase flows in tube bundles. *Bulletin de la Direction des études et recherches - Electricité de France. Série A, nucléaire, hydraulique, thermique. In french*, page 61–76, 1989.
- [8] F. Dubois. Boundary conditions and the Osher scheme for the Euler equations of gas dynamics. *Internal Report CMAP 170, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France*, 1987.
- [9] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. The finite volume methods. *Handbook for Numerical Analysis, Ph. Ciarlet J.L. Lions eds, North Holland*, pages 715–1022, 2000.
- [10] T. Gallouët, J-M. Hérard, and N. Seguin. A hybrid scheme to compute contact discontinuities in one-dimensional euler systems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 36(06):1133–1159, 2002.
- [11] T. Gallouët, J-M. Hérard, and N. Seguin. Some recent finite volume schemes to compute euler equations using real gas eos. *International journal for numerical methods in fluids*, 39(12):1073–1138, 2002.
- [12] M. Grandotto. Simulation numérique des écoulements diphasiques dans les échangeurs. *Habilitation à Diriger des Recherches, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II*, 2006.

- [13] R. Herbin, J-C. Latché, and C. Zaza. Cell-centered pressure correction scheme for the compressible euler equations. *Soumis*, <https://hal.archives-ouvertes.fr>, 2015.
- [14] O. Hurisse. Compte-rendu d'étude titans : Schéma à correction de pression de type thyc. *CR I83-12-013, compte rendu interne EDF R&D*, 2012.
- [15] J-M. Hérard and X. Martin. An integral approach to compute compressible fluid flows in domains containing obstacles. *EDF report H-I85-2015-04470-FR*, 2015.
- [16] Code-Saturne 4.0. Theory Manual.
<http://code-saturne.org/cms/sites/default/files/docs/4.0/theory.pdf>.
available on <http://code-saturne.org/>, 2015.
- [17] P. Mathon, F. Archambeau, and J-M. Hérard. Implantation d'un algorithme compressible dans *code_saturne*. *EDF report H-I83-2004-00450-FR*, 2004.
- [18] R. Temam. *Navier-Stokes Equations, Theory and numerical analysis*. North-Holland publishing company. Amsterdam Oxford New-York, 1979.
- [19] I. Toumi, A. Bergeron, D. Gallo, E. Royer, and D. Caruge. Flica-4: a three-dimensional two-phase flow computer code with advanced numerical methods for nuclear applications. *Nuclear Engineering and Design*, 200:139–155, 2000.
- [20] N.N. Yanenko. *Méthode à pas fractionnaires. Résolution de problèmes poly-dimensionnels de physique mathématique*. Librairie Armand Colin, 1968.
- [21] C. Zaza. *Contribution to numerical methods for all Mach flow regimes and to fluid-porous coupling for the simulation of homogeneous two-phase flows in nuclear reactors. Numerical Analysis*. PhD thesis, Aix Marseille Université, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01135355>, 2015.

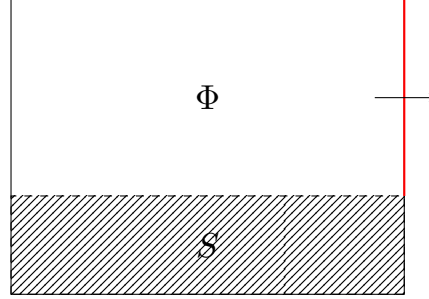


Figure 3: Cellule située au bord du domaine. La zone blanche (et symbolisée par Φ) est la partie occupée par le fluide, tandis que la partie hachurée (et symbolisée par S) est occupée par un interne. On applique sur la surface de sortie fluide (représentée en rouge) une condition aux limites d'entrée/sortie.

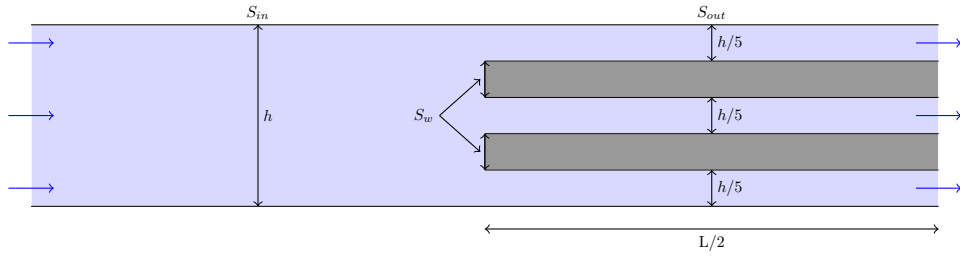


Figure 4: Le domaine est de type tubulaire 2D, de taille $L \times h$, contenant 2 internes. Les internes sont situés dans la seconde moitié du domaine, et espacés de $h/5$. Le fluide entre dans le domaine par la gauche, et sort par la droite du domaine. On a $S_{out} + S_w = S_{in}$.

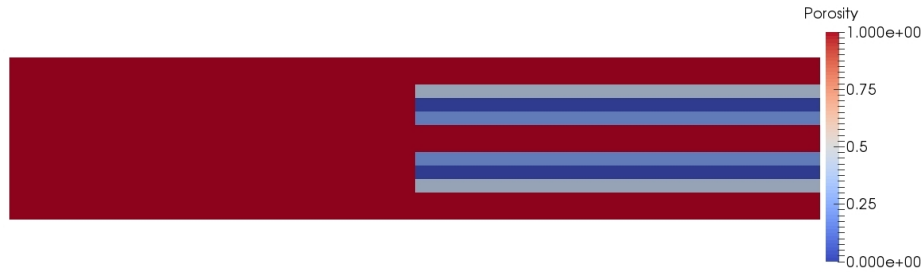


Figure 5: Porosité - Le maillage est composé de 48×12 mailles. On observe en rouge les cellules totalement fluides, en bleu foncé les cellules totalement solide, et en bleu et en gris les cellules poreuses.

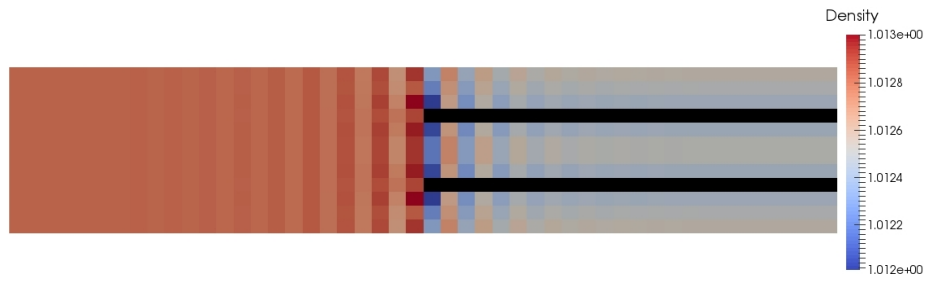


Figure 6: Densité - Les cellules noires sont des cellules totalement solides.

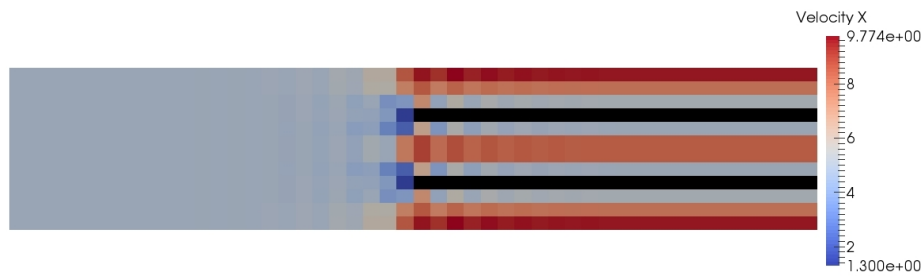


Figure 7: Vitesse axiale U_x - Les cellules noires sont des cellules totalement solides.

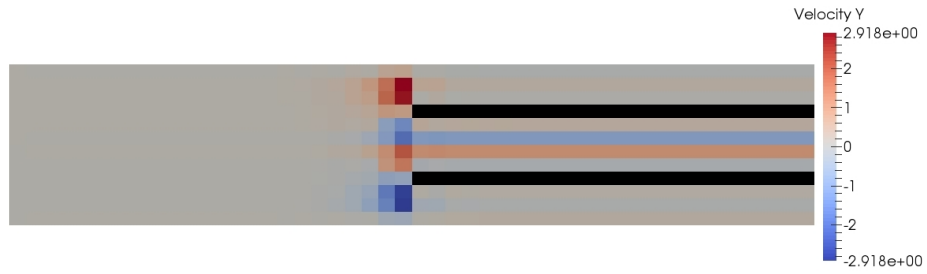


Figure 8: Vitesse transverse U_y - Les cellules noires sont des cellules totalement solides.

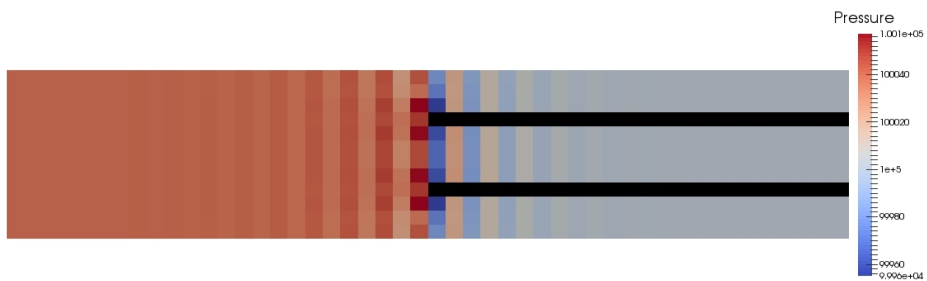


Figure 9: Pression - Les cellules noires sont des cellules totalement solides.

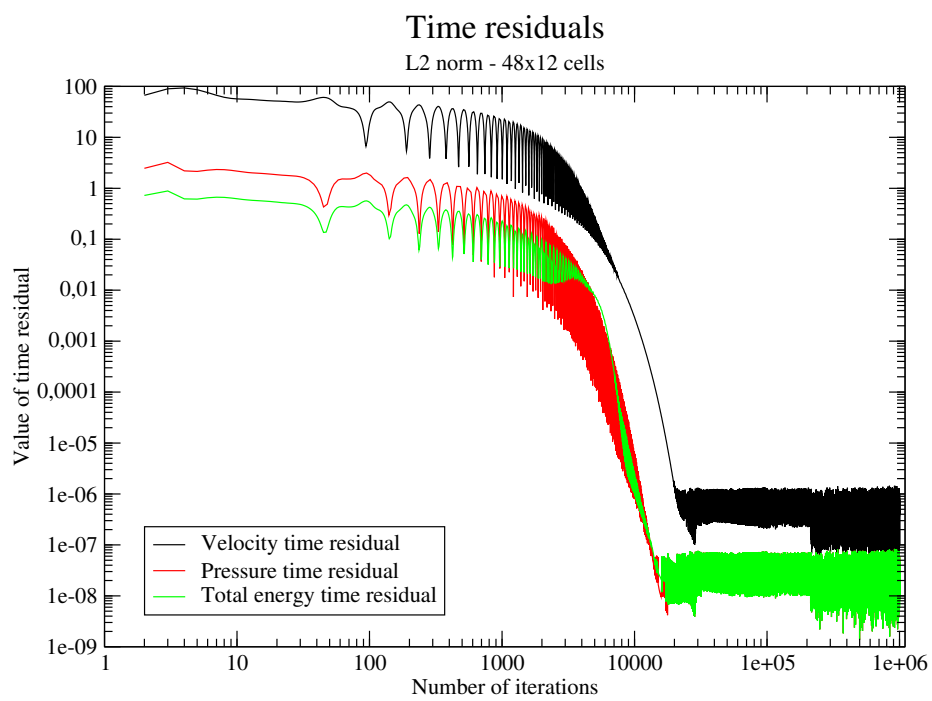


Figure 10: Résidus temporels en norme L^2 - Chaque courbe représente la valeur du résidu temporel au cours du temps pour la vitesse (en noir), la pression (en rouge) et l'énergie totale (en vert).

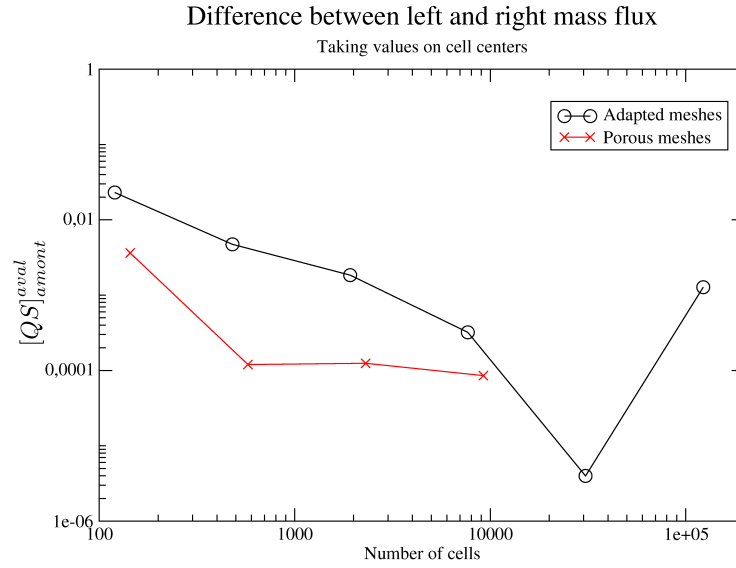


Figure 11: Différence entre les flux de masse amont et aval $[QS]_{amont}^{aval}$. La valeur des flux a été prise au centre des cellules. Les maillages adaptés au domaine représentés par la courbe noire sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×5 , 48×10 , 96×20 , 192×40 , 384×80 , et 768×160 . Les maillages poreux représentés par la courbe rouge sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×6 , 48×12 , 96×24 , et 192×48 .

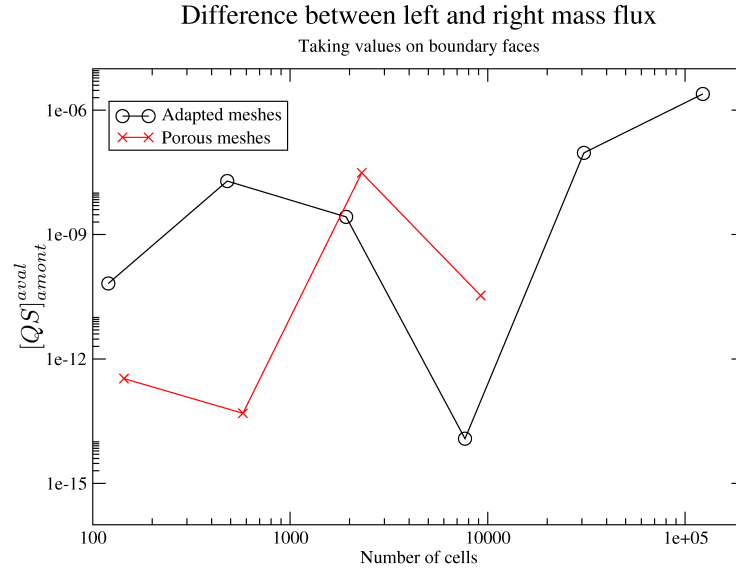


Figure 12: Différence entre les flux de masse amont et aval $[QS]_{amont}^{aval}$. La valeur des flux a été prise aux faces. Les maillages adaptés au domaine représentés par la courbe noire sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×5 , 48×10 , 96×20 , 192×40 , 384×80 , et 768×160 . Les maillages poreux représentés par la courbe rouge sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×6 , 48×12 , 96×24 , et 192×48 .

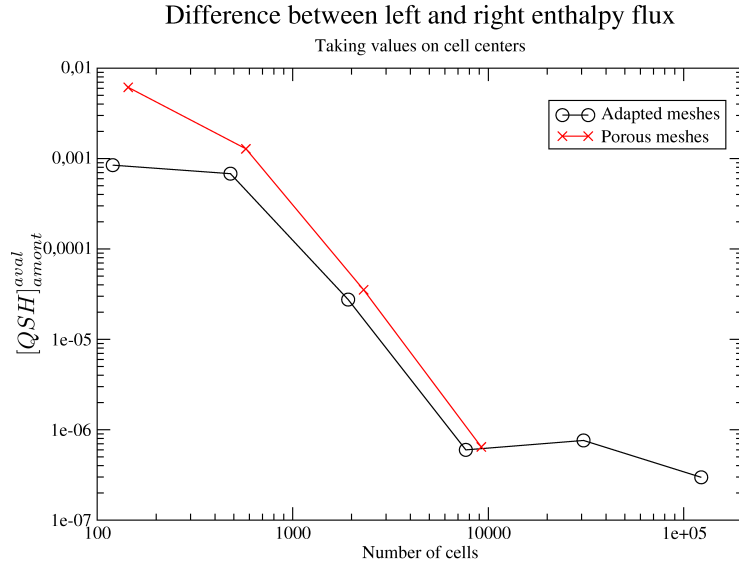


Figure 13: Différence entre les flux d'enthalpie amont et aval $[QSH]_{amont}^{aval}$. La valeur des flux a été prise au centre des cellules. Les maillages adaptés au domaine représentés par la courbe noire sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×5 , 48×10 , 96×20 , 192×40 , 384×80 , et 768×160 . Les maillages poreux représentés par la courbe rouge sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×6 , 48×12 , 96×24 , et 192×48 .

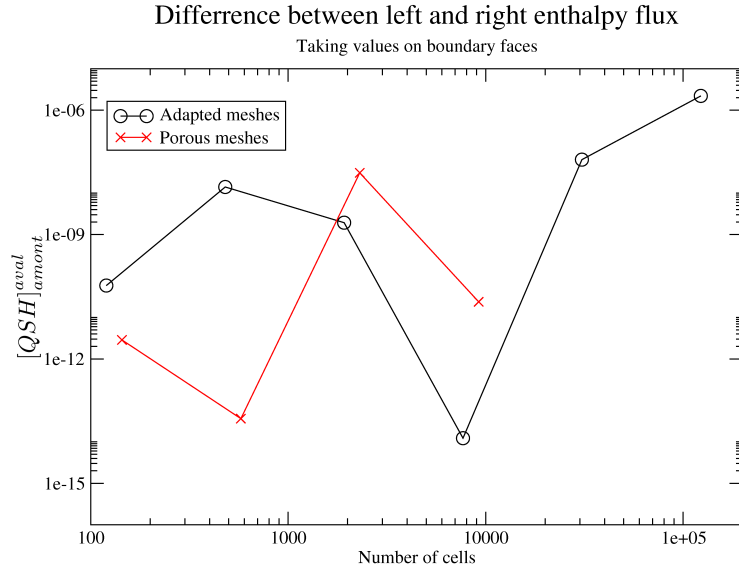


Figure 14: Différence entre les flux d'enthalpie amont et aval $[QSH]_{amont}^{aval}$. La valeur des flux a été prise aux faces. Les maillages adaptés au domaine représentés par la courbe noire sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×5 , 48×10 , 96×20 , 192×40 , 384×80 , et 768×160 . Les maillages poreux représentés par la courbe rouge sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×6 , 48×12 , 96×24 , et 192×48 .

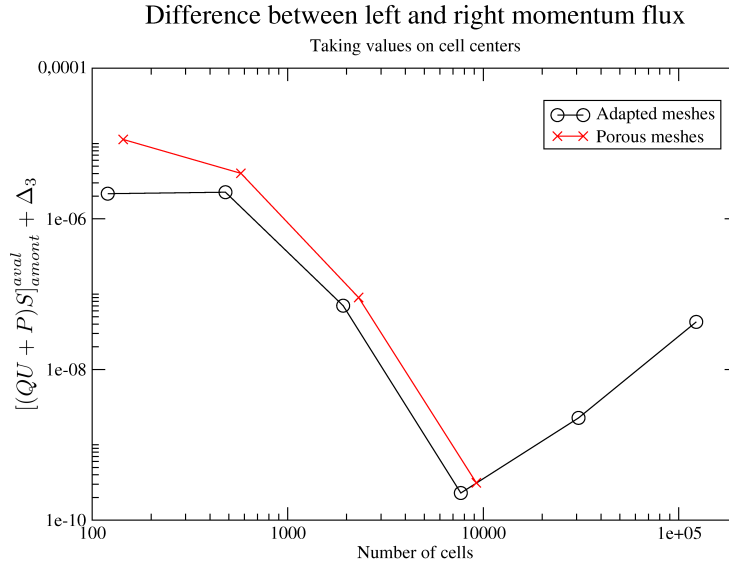


Figure 15: Différence entre les flux amont et aval issus de l'équation de quantité de mouvement $[(QU + P)S]_{amont}^{aval} + \Delta_3$. La valeur des flux a été prise au centre des cellules. Les maillages adaptés au domaine représentés par la courbe noire sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×5 , 48×10 , 96×20 , 192×40 , 384×80 , et 768×160 . Les maillages poreux représentés par la courbe rouge sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×6 , 48×12 , 96×24 , et 192×48 .

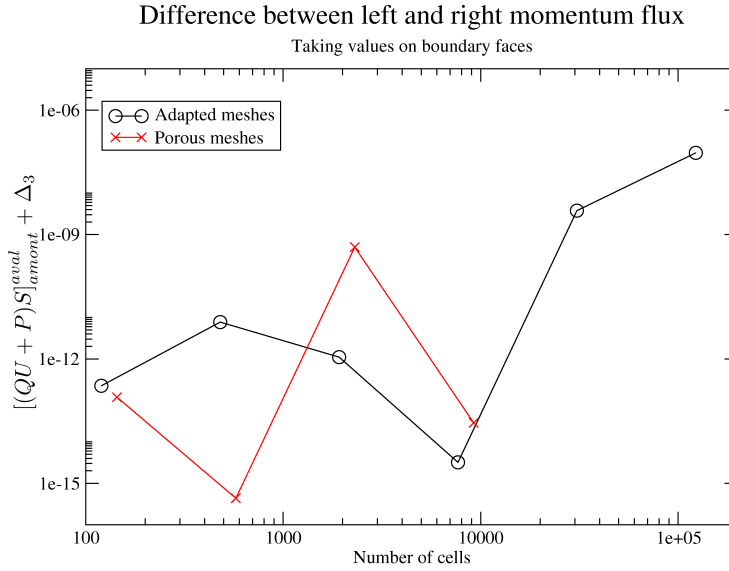


Figure 16: Différence entre les flux amont et aval issus de l'équation de quantité de mouvement $[(QU + P)S]_{amont}^{aval} + \Delta_3$. La valeur des flux a été prise aux faces. Les maillages adaptés au domaine représentés par la courbe noire sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×5 , 48×10 , 96×20 , 192×40 , 384×80 , et 768×160 . Les maillages poreux représentés par la courbe rouge sont, du plus grossier au plus fin, de taille 24×6 , 48×12 , 96×24 , et 192×48 .

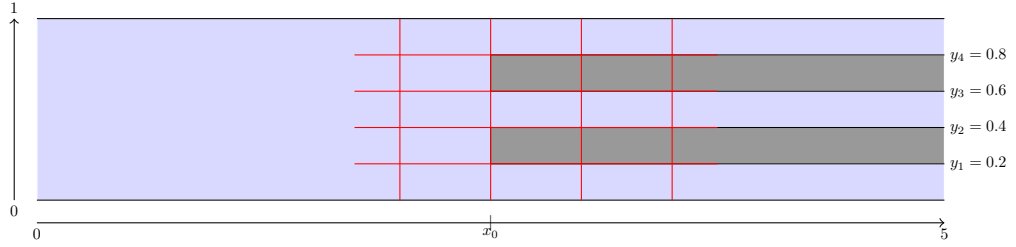


Figure 17: Dans cette configuration, le maillage (en rouge) a été conçu pour s'adapter au domaine. En effet, les cellules sont soit totalement fluides, soit entièrement solides.

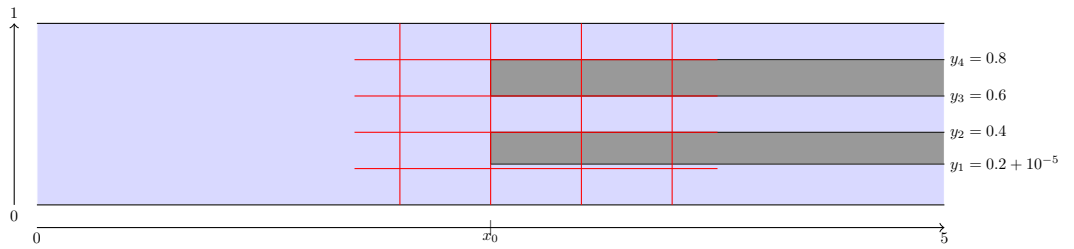


Figure 18: Dans cette configuration, l'interne du bas voit l'une de ses parois (y_1) réhaussée de 10^{-5} . Le maillage n'est alors plus adapté et on voit apparaître des cellules poreuses, très peu fluides.

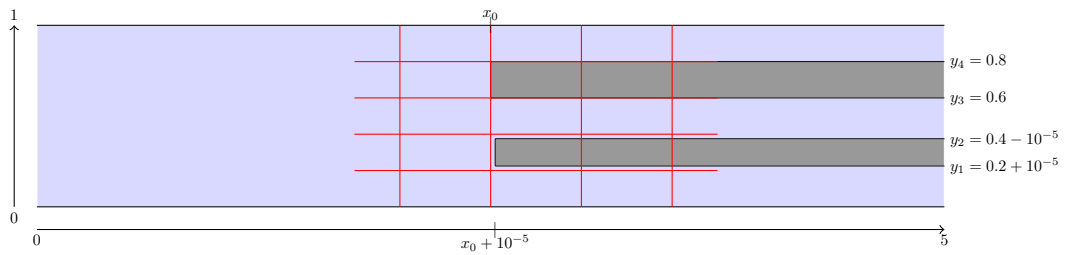


Figure 19: Dans cette configuration, les parois de l'interne du bas sont modifiées de telle sorte que y_1 soit réhaussé, y_2 rabaissé et x_0 avancé de 10^{-5} . Le maillage n'est donc plus adapté et on voit apparaître des cellules poreuses très peu fluides.

Conclusion et perspectives

La motivation générale de cette thèse était d'acquiescer les compétences techniques dans le domaine de la modélisation des écoulements fluides en milieux encombrés, avec pour objectif initial de proposer une nouvelle approche continuellement fiable dans le temps et implémentable industriellement.

Ce travail a premièrement permis d'apporter, dans un cadre unidimensionnel, une nouvelle approche pour la modélisation et la simulation d'écoulements fluides compressibles en conduite à section variable, améliorant dans un même temps, l'approche poreuse classique.

La première partie de ce travail, s'appuyant sur une formulation intégrale des équations régissant l'écoulement du fluide, a ensuite été "exportée" en dimension supérieure pour la simulation d'écoulements fluides en milieux encombrés d'obstacles. Ce dernier apporte une nouvelle vision de l'évolution des codes dits "poreux" avec l'avancée des machines de calculs.

Enfin, il a été possible d'implémenter cette approche dans un code de calcul pré-existant (*Code_Saturne*), basé sur un algorithme employant des schémas implicites à pas fractionnaires.

Dans le cadre de la simulation d'écoulements en milieu encombré, il n'a pas été aisé de déterminer et d'être en accord sur une solution pertinente de référence d'écoulement stationnaire compressible en conduite à section variable discontinue.

L'une des principales difficultés de la dernière partie a été de ré-adapter, pour chaque cas test, la partie "preprocessing" du code en prenant en compte les obstacles afin d'initialiser le volume fluide de chaque cellule et de redéfinir les distances aux interfaces des centres fluides des cellules.

En perspective et en parallèle du premier chapitre, un travail de modification des conditions d'interfaces dans l'approche well-balanced a été réalisé et soumis¹.

Concernant les cas test effectués jusqu'ici, tous ont été réalisés sous l'hypothèse de l'équation d'état de gaz parfaits. Un prochain travail consistera à tester les schémas avec une équation d'état plus complexe.

La seconde section du second chapitre introduisait la forme intégrale des lois de conservation en prenant en compte dans le second membre non nul, les effets de viscosité. Néanmoins, tous les tests qui ont suivi ont été réalisés en mettant de côté les termes sources. Une prochaine étape, à court terme, serait donc d'étendre l'approche intégrale au cadre d'écoulements de fluides visqueux.

1. "An interface condition to compute compressible flows in variable cross-section ducts", J.M. Hérard and J. Jung, accepté à *Compte-Rendus Mathématique*, 2015

Des études comparatives sont également à envisager avec des codes de calculs poreux déjà existants tels que THYC².

Initialement, *Code_Saturne* permet de modéliser des écoulements incompressibles. On peut alors imaginer une adaptation, à moyen terme, de la nouvelle approche poreuse pour des écoulements incompressibles et turbulents.

Enfin, une autre perspective néanmoins conséquente, issue de la difficulté à réadapter le preprocessing à chaque cas test, serait d'implémenter un module générique couplant la géométrie interne et le maillage du domaine. Ce module générerait automatiquement toutes les contributions nécessaires à l'approche poreuse.

2. G. Le Coq, S. Aubry, J. Cahouet, P. Lequesne, G. Nicolas, and S. Pastorini. *The THYC computer code. A finite volume approach for 3 dimensional two-phase flows in tube bundles*. Bulletin de la Direction des études et recherches - Electricité de France. Série A, nucléaire, hydraulique, thermique. In french, page 61–76, 1989